บทความวิจัย

ช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์สำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย*
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0–2564–4444 ต่อ 2100 อีเมล: spatchan@tu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.11.002
รับเมื่อ 2 พฤษภาคม 2559 ตอบรับเมื่อ 8 กรกฎาคม 2559 เผยแพร่ออนไลน์ 16 พฤศจิกายน 2559

บทคัดย่อ

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนถูกประยุกต์ใช้ในหลายสาขาแขนงวิชา เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม การแพทย์ และธุรกิจ ในงานวิจัยนี้ ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยถูกสร้างขึ้นในกรณีที่ไม่ทราบพารามิเตอร์กำหนดรูปร่างโดยใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์เป็นวิธีกำจัดพารามิเตอร์รูปร่างดังกล่าว เพื่อที่จะใช้การแจกแจงเชิงเส้นกำกับคาลิเบรท (Calibrate) ภาวะน่าจะเป็น ขนาดตัวอย่างต้องมีขนาดใหญ่เพียงพอ ดังนั้นขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมจะถูกกำหนดโดยการพิจารณาค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมซึ่งประมาณด้วยการจำลองมอนติคาร์โล ในทางคณิตศาสตร์สามารถพิสูจน์ได้ว่าทั้งในกรณีที่ทราบและไม่ทราบพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นไม่ได้ลู่เข้าสู่ค่าศูนย์เมื่อพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยเข้าสู่ค่าอนันต์แต่จะลู่เข้าสู่ค่าหนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับตัวอย่าง พร้อมทั้งหาตัวประมาณของความน่าจะเป็นที่จะสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้สำเร็จเมื่อกำหนดตัวอย่างให้และการพิสูจน์สุดท้าย ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์จะมีค่าสูงสุดเมื่อพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยเท่ากับค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด สำหรับผลการศึกษาเชิงจำลองพบว่าเมื่อใช้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมเป็นเกณฑ์แล้วถ้าประชากรที่ศึกษามีความเบ้สูง ขนาดตัวอย่างที่ใช้จะมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น

คำสำคัญ: การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน, ช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์, การจำลองมอนติคาร์โล

การอ้างอิงบทความ: พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย, “ช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์สำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน,” *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 27, ฉบับที่ 2, หน้า 339–350, เม.ย.–มิ.ย. 2560

Research Article

Profile Likelihood–Based Confidence Intervals for the Mean of Inverse Gaussian Distribution

Patchanok Srisuradetchai*
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Rangsit Campus, Pathum-Thani, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0–2564–4444 Ext. 2100, E-mail: spatchan@tu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.11.002
Received 2 May 2016; Accepted 8 July 2016; Published online: 16 November 2016

Abstract

The inverse Gaussian distribution is applied in a wide range of applications such as physics, engineering, medicine, and business. In this research, a confidence interval of the mean is constructed for the inverse Gaussian distribution with an unknown shape parameter. The profile likelihood is employed as a method to eliminate a shape parameter. In order to use an asymptotic distribution to calibrate the likelihood, the sample size must be large enough. Thus the optimal sample sizes need to be determined by considering the coverage probability estimated by the Monte Carlo simulation method. Likelihood function is mathematically proved that it does not converge to zero as the mean approaches infinity – in both known and unknown shape parameters, but approaches to a certain quantity depending on sample. Also, the estimator is derived for probability of success in constructing confidence interval with a given sample size. Finally, the profile likelihood function is founded to be maximum when the mean is equal to the maximum likelihood estimate. For the simulation study, based on desirable coverage probability, a larger sample size is required when the population becomes more skewed.

Keywords: Inverse Gaussian Distribution, Profile Likelihood-based Confidence Intervals, Monte Carlo Simulation

Please cite this article as: P. Srisuradetchai, "Profile likelihood-based confidence intervals for the mean of inverse gaussian distribution," *The Journal of KMUTNB.*, vol. 27, no. 2, pp. 339–350, Apr.–Jun. 2017 (in Thai).

1. บทนำ

แนวคิดของการอนุมานเชิงสถิติสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 แบบ คือ 1) แบบดั้งเดิม (Classical) ซึ่งเป็นแนวคิดของ Frequentist 2) แบบเบส์ (Bayesian) และ 3) แบบภาวะน่าจะเป็น (Likelihood) ซึ่งเป็นแนวคิดของ Fisher [1] โดยแนวคิดสุดท้ายนี้พัฒนาขึ้นโดย R. A. Fisher โดยการอนุมานเชิงสถิตินั้นจะขึ้นกับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) เพียงอย่างเดียว ซึ่งแตกต่างจากแนวคิดของ Frequentist ที่ใช้การแจกแจงค่าตัวอย่าง (Sampling Distribution) ในการอนุมานเชิงสถิติ และในขณะที่นักสถิติแบบเบส์ใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง (Posterior Probability Distribution) ในการอนุมาน แนวคิดของสองกลุ่มหลังนี้มีลักษณะที่ตรงกันข้ามอย่างสิ้นเชิง กล่าวคือ Frequentist ถือว่าพารามิเตอร์ที่สนใจเป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบ ในขณะที่แนวคิดแบบเบส์จะถือว่าพารามิเตอร์ที่สนใจเป็นตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เรียกว่า การแจกแจงก่อน (Prior Distribution) แล้วหาการแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) เพื่อใช้อนุมานเชิงสถิติ [2] แนวคิดของ Fisher จะมีส่วนที่คล้ายคลึงกับ Frequentist และบางส่วนคล้ายคลึงกับ Bayesian ซึ่งผู้สนใจสามารถอ่านศึกษาเพิ่มเติมจาก Rohde [3]

Fisher [1] ได้เสนอการสร้างช่วงภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Interval) สำหรับพารามิเตอร์ θ โดยมีช่วงดังนี้

$$\left\{\theta \left| \frac{L(\theta)}{\max L(\theta)} > c \right.\right\} = \left\{\theta \left| \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} > c \right.\right\} \tag{1}$$

โดยที่ $L(\theta)$ คือฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ θ และ $L(\hat{\theta})$ แทนค่าสูงสุดของภาวะน่าจะเป็นซึ่งจะสูงสุดก็ต่อเมื่อ θ มีค่าเท่ากับค่าประมาณที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Method of Maximum Likelihood) สำหรับ c เป็นค่าที่เลือกได้ ซึ่งโดยปกติแล้วการกำหนดค่า c นี้จะอาศัยการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution) กล่าวคือ ตัวสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นของ Wilk [4] ดังสมการที่ (2)

$$W = -2\log_e \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} \tag{2}$$

จะมีการแจกแจงไคกำลังสองที่แท้จริงเมื่อประชากรมีการแจกแจงปรกติและไคกำลังสองโดยประมาณสำหรับประชากรที่มีการแจกแจงแบบอื่นๆ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่จากทฤษฎีข้างต้นสามารถเลือกค่า c ให้มีค่าเท่ากับ $\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ ทำให้

$$P\left(\frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} > c\right) = P\left(W < \chi^2_{1,(1-\alpha)}\right) = 1-\alpha \tag{3}$$

โดยที่ W ในสมการที่ (3) แทนตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 และ $\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ แทนควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ของ χ^2_1 ซึ่งค่า $c = \exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ นี้จะทำให้สมการที่ (1) เรียกว่า ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ θ [5] และขอบเขตล่างและบนของช่วงได้จากการแก้สมการ $L(\theta)/L(\hat{\theta}) = c$

ในงานวิจัยนี้ จึงสนใจการประมาณค่าแบบช่วงที่ใช้ภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Based Intervals) สำหรับพารามิเตอร์ตำแหน่งหรือค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ซึ่งเป็นการแจกแจงที่สำคัญที่มีการประยุกต์ใช้แพร่หลายในหลายแขนง เช่น Wise [6] ศึกษาการแจกแจงของวงจรเวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่ในกระแสโลหิต Leonenkoa, *et al.* [7] ใช้การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนเป็นตัวแบบสำหรับสินทรัพย์และการลงทุนที่มีผลตอบแทนไม่แน่นอนที่ขึ้นอยู่กับราคาหุ้น Liu, *et al.* [8] ศึกษาอายุการใช้งานของฉนวนกันความร้อนซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ (Reliability Analysis) เป็นต้น

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนเป็นการแจกแจงเบ้ขวาที่มีพารามิเตอร์สองตัว คือ ค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์ที่กำหนดรูปร่าง (Shape Parameter) λ มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น คือ

$$f(x;\mu,\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left\{\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\} \tag{4}$$

โดยที่ $x > 0$, $\mu > 0$ และ $\lambda > 0$ และจากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องพบว่าฟังก์ชันความหนาแน่น

ของอินเวอร์สเกาส์เซียนสามารถเขียนได้ในหลายรูปแบบ เช่น Chou และ Huang [9] ได้เขียนอยู่ในรูปของ $f(x) = Cx^{\alpha-1}\exp\left(-px-\frac{q}{x}\right), x>0, \alpha>0, p>0$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น สำหรับตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ μ และ λ ในสมการที่ (4) คือ $\hat{\mu} = \bar{X}$ และ $\hat{\lambda} = n\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(1/X_i - 1/\bar{X}\right)$ โดยที่ $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n$ นอกจากนี้ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำที่สุด (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator: UMVUE) ของ μ และ λ คือ $\hat{\mu} = \bar{X}$ และ $\hat{\lambda} = (n-3)\times\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1/X_i - 1/\bar{X}\right)\right]^{-1}$ ตามลำดับ [10]

Arefi *et al*. [11] ได้เสนอการประมาณแบบช่วง 3 วิธีสำหรับค่าเฉลี่ยเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนในกรณีที่ทราบค่า λ คือ 1) ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald Confidence Intervals) ซึ่งคือ $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\, \bar{X}^{3/2}\big/\sqrt{n\lambda}$ 2) ช่วงความเชื่อมั่นแบบสกอร์ (Score Intervals) ซึ่งเป็นช่วงที่ได้จากการแก้สมการ $-z_{1-\alpha/2} \le \sqrt{n\lambda}\left(\bar{X}-\mu\right)\big/\sqrt{\mu^3}$ และ 3) ช่วงที่ได้จากอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นซึ่งเป็นดังนี้

$$\frac{n\lambda\bar{X}}{n\lambda + k\sqrt{n\lambda\bar{X}}} \le \mu \le \frac{n\lambda\bar{X}}{n\lambda - k\sqrt{n\lambda\bar{X}}} \tag{5}$$

โดยที่ $k = \sqrt{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}$ และ $0 < k < \sqrt{n\lambda/\bar{X}}$ จะเห็นได้ว่าช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 3 แบบขึ้นอยู่กับการแจกแจงเชิงเส้นกำกับซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างและค่า λ อาจไม่ทราบค่าในทางปฏิบัติ นอกจากนี้เงื่อนไข $\sqrt{\chi^2_{1,(1-\alpha)}} < \sqrt{n\lambda/\bar{X}}$ ของสมการที่ (5) จะขึ้นอยู่กับชุดของตัวอย่างที่สุ่มได้

ในกรณีที่ไม่ทราบค่า λ ในงานวิจัยนี้จะใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (Profile Likelihood) เพื่อกำจัดพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า λ ในการหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน พร้อมทั้งศึกษาเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ที่ทำให้สามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าวได้ นอกจากนี้ยังศึกษาโดยใช้การจำลองโดยใช้มอนติคาร์โลเพื่อประมาณค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม (Coverage Probability) ความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ และหาขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นซึ่งต้องอาศัยการแจกแจงเชิงเส้นกำกับของการแจกแจงไคกำลังสอง โดยมีขอบเขตในการศึกษาคือการแจงแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนที่มีพารามิเตอร์ μ เท่ากับ 1, 3 และ 7 กับพารามิเตอร์ λ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.5, 1 และ 3 รวมทั้งหมด 9 กรณี ในแต่ละกรณีข้างต้นนี้จะมีความแปรปรวน μ^3/λ และความเบ้ $3\sqrt{\mu/\lambda}$ แตกต่างกัน

2. ช่วงแบบภาวะน่าจะเป็น

ในกรณีที่ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์อื่นที่ไม่สนใจ (พารามิเตอร์รบกวน) ในกรณีนี้พารามิเตอร์ที่สนใจคือ ค่าเฉลี่ย μ ตามแนวคิดของนักสถิติแบบ Fisher จะกำจัดพารามิเตอร์รบกวนด้วยการแทนด้วยตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ที่สนใจเท่ากับค่าคงที่และภาวะน่าจะเป็นที่ได้จะเรียกว่าภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ซึ่งการกระทำเช่นนี้จะแตกต่างจากการแทนที่ด้วยตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งจะให้ภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ (Estimated Likelihood) [5]

เมื่อกำหนดฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม $L(\mu,\lambda)$ แล้วฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของพารามิเตอร์ μ คือ

$$L(\mu) = \max_{\lambda} L(\mu,\lambda) \tag{6}$$

โดยที่การหาค่าสูงสุดในสมการที่ (6) กระทำที่ค่าคงที่ของ μ เพื่อมิให้สับสนกับภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณซึ่งแทนด้วย $L(\mu) = L(\mu,\hat{\lambda})$ โดยที่ $\hat{\lambda}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งถ้า $\hat{\lambda}$ นี้ขึ้นกับ μ ก็จะแทนด้วยตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ μ ในที่นี้สามารถเขียนฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แทนด้วย $L(\mu,\tilde{\lambda})$ โดยที่ $\tilde{\lambda}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ เมื่อให้ μ เป็นค่าคงที่ ตัวอย่างเช่นสนใจพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ ของการแจกแจงปรกติที่ไม่ทราบความแปรปรวน σ^2 แล้วฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณของ μ แทนด้วย $L(\mu,\hat{\sigma}^2)$ โดยที่ $\hat{\sigma}^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ ในขณะที่ฟังก์ชัน

ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์จะแทนด้วย $L(\mu,\tilde{\sigma}^2)$ โดยที่ $\tilde{\sigma}^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

สำหรับแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นของ μ ในกรณีที่ทราบพารามิเตอร์ที่กำหนดรูปร่าง λ คือ

$$\left\{\mu \left| \frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})} > \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)\right.\right\} \quad (7)$$

เมื่อจัดรูปใหม่จะได้ตรงกับสมการที่ (5) ซึ่งนำเสนอโดย Arefi *et al.* [11] ซึ่งส่วนหนึ่งของงานวิจัยนี้ จะพิสูจน์ให้เห็นว่าลิมิตของ $L(\mu)/L(\hat{\mu})$ ไม่ได้ลู่เข้าสู่ศูนย์แต่ลู่เข้าสู่ค่าหนึ่งซึ่งอาจจะมีค่ามากกว่า $c = \exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ และในกรณีนี้จะไม่สามารถสร้างช่วงได้ สำหรับกรณีที่ λ เป็นค่าที่ไม่ทราบ สามารถใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ $L(\mu,\tilde{\lambda})$ แทน $L(\mu)$ และ $\max L(\mu,\tilde{\lambda})$ แทน $L(\hat{\mu})$ ในสมการที่ (7) อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ไม่สามารถใช้ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ทุกกรณี โดยจะแสดงผลการศึกษาในหัวข้อถัดไป

3. ผลการศึกษาในทางคณิตศาสตร์

ส่วนหนึ่งของงานวิจัยครั้งนี้ คือการศึกษาพฤติกรรมของอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นในเชิงคณิตศาสตร์ ได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ $x_1,x_2,\ldots x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย μ แต่ทราบพารามิเตอร์รูปร่าง λ แล้ว

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})} = 0 \text{ และ } \lim_{\mu\to\infty}\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})} = \exp\left(\frac{-n\lambda}{2\hat{\mu}}\right)$$

โดยที่ $\hat{\mu} = \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \big/ n$

พิสูจน์

$$L(\mu) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-3/2}\exp\left[\frac{-\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\mu^2} - \frac{2n}{\mu} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right]$$

และ

$$L(\hat{\mu}) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-3/2}\exp\left[\frac{-\lambda}{2}\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i} - \frac{2n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right]$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})} &= \exp\left[\frac{-\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\mu^2} - \frac{2n}{\mu} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i} - \frac{2n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\mu^2} - \frac{2n}{\mu} - \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\hat{\mu}^2} + \frac{2n}{\hat{\mu}}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{2n\lambda\mu - n\lambda\hat{\mu}}{2\mu^2} - \frac{n\lambda}{2\hat{\mu}}\right]
\end{aligned}$$

แล้วหาลิมิตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu\to 0}\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})} &= \lim_{\mu\to 0}\exp\left[\frac{2n\lambda\mu - n\lambda\hat{\mu}}{2\mu^2} - \frac{n\lambda}{2\hat{\mu}}\right] \\
&= \lim_{\mu\to 0}\exp\left[\frac{1}{2\mu^2}\left(2n\lambda\mu - n\lambda\hat{\mu} - \frac{n\lambda\mu^2}{\hat{\mu}}\right)\right] \\
&= \exp\left[\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{2\mu^2}\times\lim_{\mu\to 0}\left(2n\lambda\mu - n\lambda\hat{\mu} - \frac{n\lambda\mu^2}{\hat{\mu}}\right)\right] \\
&= \exp\left[(\infty)(-n\lambda\hat{\mu})\right] \\
&= \exp(-\infty) = 0
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu\to\infty}\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})} &= \lim_{\mu\to\infty}\exp\left[\frac{2n\lambda\mu - n\lambda\hat{\mu}}{2\mu^2} - \frac{n\lambda}{2\hat{\mu}}\right] \\
&= \exp\left[\left(\lim_{\mu\to\infty}\frac{2n\lambda\mu - n\lambda\hat{\mu}}{2\mu^2}\right) - \left(\lim_{\mu\to\infty}\frac{n\lambda}{2\hat{\mu}}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\left(\lim_{\mu\to\infty}\frac{n\lambda}{2\hat{\mu}}\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{n\lambda}{2\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทข้างต้นจะทำให้ทราบว่าตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มได้นี้ จะใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นได้เมื่อ

$$\exp\left(-\frac{n\lambda}{2\bar{X}}\right) < \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้ $\frac{n\lambda}{\bar{X}} > \chi^2_{1,(1-\alpha)}$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขเดียวกันกับช่วงความเชื่อมั่นดังแสดงในสมการที่ (5) แต่ในที่นี้ได้แสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขดังกล่าวสามารถหาได้จากลิมิตของ $L(\mu)/L(\hat{\mu})$

บทตั้ง 2 ให้ $x_1,x_2,\ldots x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบทั้งค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์รูปร่าง λ แล้วฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ $L(\mu,\tilde{\lambda})$ จะมีค่าสูงสุดที่ $\mu=\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big/n$ โดยที่

$$\tilde{\lambda}=\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}-\frac{2}{\mu}\right)^{-1}$$

พิสูจน์ เมื่อกำหนดให้ μ เท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่งจะสามารถหา λ ที่ทำให้ $L(\mu,\lambda)$ มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ของ $\log L(\mu,\lambda)$ เทียบกับ λ แล้วกำหนดให้เท่ากับศูนย์ได้ดังนี้

$$\log L(\mu,\lambda)=\frac{n}{2}\log\lambda-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\mu^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{-1}}\right)+\frac{n\lambda}{\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(\mu,\lambda)=\frac{n}{2\lambda}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\mu^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{-1}}\right)+\frac{n}{\lambda}$$

ให้ $\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(\mu,\tilde{\lambda})=0$ จะได้

$$\tilde{\lambda}=\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}-\frac{2}{\mu}\right)^{-1} \qquad (8)$$

แล้วแทน λ ใน $\log L(\mu,\lambda)$ ด้วย $\tilde{\lambda}$ จะได้

$$\log L(\mu,\tilde{\lambda})=c-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2}-\frac{2}{\mu}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}\right)-$$

$$\frac{\frac{n\hat{\mu}}{\mu^2}+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{\frac{2}{\mu}\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu}+\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-2\right)}+\frac{n}{\frac{\hat{\mu}}{\mu}+\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-2}$$

$$=c-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2}-\frac{2}{\mu}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}\right)+\frac{2n-\frac{n\hat{\mu}}{\mu}-\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{2\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu}+\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-2\right)}$$

$$=c-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2}-\frac{2}{\mu}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}\right)$$

โดยที่ $c=-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$

พิจารณาเทอม $\log\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2}-\frac{2}{\mu}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}\right)$

$$=\log\left(\left(\frac{n\mu}{n\mu}\right)\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2}-\frac{2}{\mu}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}\right)\right)$$

$$=-\log(n\mu)+\log\left(\frac{n\hat{\mu}}{\mu}-2n+\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)$$

ดังนั้น $\log L(\mu,\tilde{\lambda})=$

$$c-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\log(n\mu)-\frac{n}{2}\log\left(\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+\frac{n\hat{\mu}}{\mu}-2n\right) \qquad (9)$$

แล้วหา μ ที่ทำให้สมการที่ (9) มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ของ $\log L(\mu,\tilde{\lambda})$ เทียบกับ μ แล้วกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu,\tilde{\lambda}) =$$

$$\frac{n}{2\mu}-\frac{n}{2\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+\frac{n\hat{\mu}}{\mu^2}-\frac{2n}{\mu}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-\frac{n\hat{\mu}}{\mu^2}\right)$$

กำหนดให้ $\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu,\tilde{\lambda})=0$ จะได้ $\mu=\hat{\mu}$ ซึ่งแสดงว่าฟังก์ภาวะน่าจะเป็น $L(\mu)$ และฟังก์ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ $L(\mu,\tilde{\lambda})$ จะมีค่าสุด ณ μ ที่มีค่าเท่ากันซึ่งเท่ากับค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\mu}$ แต่อย่างไรก็ตามฟังก์ชันทั้ง 2 นั้นแตกต่างกัน แต่เพียงค่าสูงสุดของฟังก์ชันเกิดขึ้น ณ ตำแหน่งเดียวกัน

ทฤษฎีบท 3 ให้ $x_1,x_2,\ldots x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบทั้งค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์รูปร่าง λ แล้ว

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})}=0$$

และ

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})}=\left(1-\frac{n}{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}\right)^{n/2}$$

โดยที่ $\tilde{\lambda}$ แสดงดังในสมการที่ (8)

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2 จะได้ว่า $\max L(\mu,\tilde{\lambda})$ จะมีค่าเท่ากับ $L(\hat{\mu},\tilde{\lambda})$ พิจารณา

$$\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})}=\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{L(\hat{\mu},\tilde{\lambda})}=\frac{\exp\left(\log L(\mu,\tilde{\lambda})\right)}{\exp\left(\log L(\hat{\mu},\tilde{\lambda})\right)}$$

$$=\frac{\exp\left[\frac{n}{2}\log(n\mu)-\frac{n}{2}\log\left(\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+\frac{n\hat{\mu}}{\mu}-2n\right)\right]}{\exp\left[\frac{n}{2}\log(n\hat{\mu})-\frac{n}{2}\log\left(\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n-2n\right)\right]}$$

$$=\exp\left[\frac{n}{2}\log\left\{\frac{\mu}{\hat{\mu}}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\,\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\right\}\right]$$

$$=\left[\frac{\mu}{\hat{\mu}}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\,\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\right]^{n/2}$$

จะได้ว่า

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})}=\lim_{\mu\to 0}\left[\frac{\mu}{\hat{\mu}}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\,\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\right]^{n/2}$$

$$=\lim_{\mu\to 0}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}}\right)^{n/2}\lim_{\mu\to 0}\left(\frac{\mu^2}{\mu^2\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\hat{\mu}-2n\mu}\right)^{n/2}$$

$$=\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}}\right)^{n/2}\times 0=0$$

และ

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})}=\lim_{\mu\to\infty}\left[\frac{\mu}{\hat{\mu}}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\,\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\right]^{n/2}$$

$$=\lim_{\mu\to\infty}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}}\right)^{n/2}\lim_{\mu\to\infty}\left(\frac{\mu}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\,\hat{\mu}/\mu-2n}\right)^{n/2}$$

$$=\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}}\right)^{n/2}\lim_{\mu\to\infty}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\,\hat{\mu}/\mu^2-2n/\mu}\right)^{n/2}$$

$$=\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}\right)^{n/2}=\left(1-\frac{n}{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}\right)^{n/2}$$

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะทำให้ทราบว่าตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มได้จะใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นได้สำเร็จนั้นเมื่อ

$$\left(1-\frac{n}{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}\right)^{n/2} < \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)$$

หรือ

$$-n\log\left[1-\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)}\right] > \chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

ทฤษฎีบท 4 ให้ $x_1,x_2,...x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย μ แต่ทราบพารามิเตอร์รูปร่าง λ แล้ว ความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างที่สุ่มได้ จะนำไปสร้างช่วงความมั่น $100(1-\alpha)\%$ (หาขอบเขตบนของช่วงเชื่อมั่นได้) ได้สำเร็จ จะประมาณด้วย

$$\Phi\left(\sqrt{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\left(\frac{n\lambda}{\mu\chi^2_{1,(1-\alpha)}}-1\right)\right)+\exp\left(\frac{2n\lambda}{\hat{\mu}}\right)\times$$

$$\Phi\left(-\sqrt{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\left(\frac{n\lambda}{\mu\chi^2_{1,(1-\alpha)}}+1\right)\right)$$

โดยที่ $\Phi(\cdot)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปรกติมาตรฐานและ $\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ แทน ควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ของตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1

พิสูจน์ จากสมการที่ (7) จะเห็นได้ว่าช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ จะสร้างได้นั้น ฟังก์ชัน $L(\mu)/L(\hat{\mu})$ จะต้องน้อยกว่า $\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ เมื่อ $\mu\to 0$ และ $\mu\to\infty$ แต่ตามทฤษฎีบท 1 ที่ได้พิสูจน์ไว้แล้วว่า ค่า μ ที่ทำให้ $L(\mu)/L(\hat{\mu})$ มีค่าเท่ากับ $\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ เพื่อใช้เป็นขอบเขตล่างของช่วงนั้นสามารถหาได้และ เมื่อ μ มีค่าเพิ่มขึ้น $L(\mu)/L(\hat{\mu})$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $\mu=\hat{\mu}$ แล้ว $L(\mu)/L(\hat{\mu})$ จะมีค่าลดลงเข้าสู่ $\exp(-n\lambda/2\hat{\mu})$ ตามทฤษฎีบท 1 ซึ่งค่าของ $\exp(-n\lambda/2\hat{\mu})$ ไม่จำเป็นต้องน้อยกว่า $\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ ในกรณีที่ไม่น้อยกว่านั้นจะไม่สามารถหาขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นได้ พิจารณาความน่าจะเป็นที่

$$\exp(-n\lambda/2\hat{\mu}) < \exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$$

ซึ่งคือ

$$P\left[\exp\left(\frac{-n\lambda}{2\hat{\mu}}\right) < \exp\left(\frac{-\chi^2_{1,(1-\alpha)}}{2}\right)\right]$$

$$= P\left[\hat{\mu} < \frac{n\lambda}{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\right] = P\left[\bar{X} < \frac{n\lambda}{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\right]$$

แต่ $\bar{X}\sim IG(\mu,n\lambda)$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $X_i\sim IG(\mu,\lambda)$ คือ

$$F(x)=\Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu}-1\right)\right]+\exp\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu}+1\right)\right]$$

[10], [12] ดังนั้น

$$P\left[\bar{X} < \frac{n\lambda}{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\right] = F_{\bar{X}}\left(\frac{n\lambda}{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\right) =$$

$$\Phi\left(\sqrt{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\left(\frac{n\lambda}{\mu\chi^2_{1,(1-\alpha)}}-1\right)\right)+\exp\left(\frac{2n\lambda}{\mu}\right)\times$$

$$\Phi\left(-\sqrt{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}\left(\frac{n\lambda}{\mu\chi^2_{1,(1-\alpha)}}+1\right)\right)$$

แต่เนื่องจาก μ เป็นค่าที่ไม่ทราบ ดังนั้น ให้ประมาณด้วย $\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big/n$

4. วิธีการศึกษาโดยใช้การจำลอง

ในหัวข้อนี้จะเป็นการศึกษา ความน่าจะเป็นคุ้มรวมความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แล้วหาขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมโดยใช้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมเป็นเกณฑ์ซึ่งได้จากการจำลองมอนติคาร์โล โดยผู้วิจัยคาดว่าเมื่อความแปรปรวนและ

ความเบ้มีค่ามาก ขนาดตัวอย่างที่ใช้จะมีค่าเพิ่มขึ้นเพื่อให้มีระดับความเชื่อมั่นให้ได้ตามที่กำหนด สำหรับขนาดตัวอย่าง (n) ที่ใช้ในการศึกษา คือ 5, 10, 15, 30, 45, 60 และ 100 ในการศึกษานี้ใช้โปรแกรม R เวอร์ชัน 3.2.5 [13] และมีขั้นตอนการศึกษามีดังนี้

4.1 จำลองตัวอย่างขนาด n โดยที่ $x_1, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนซึ่งมีพารามิเตอร์ μ และ λ ตามที่กำหนดไว้ในข้างต้น

4.2 ตรวจสอบเงื่อนไขว่าตัวอย่างที่ได้จากข้อ 4.1 สามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ได้หรือไม่ โดยพิจารณาจาก $\left(1-n\Big/\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^{n/2}$ ว่ามีค่าน้อยกว่า $\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ หรือไม่ หากไม่จริงให้กลับไปข้อ 4.1 เพื่อทำการสุ่มตัวอย่างใหม่

4.3 หาอัตราส่วนของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ μ ดังแสดงในสมการที่ (10)

$$g(\mu)=\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})}=\left[\frac{\mu}{\hat{\mu}}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\,\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\right]^{n/2} \quad (10)$$

4.4 หาขอบเขตล่าง (L) และขอบเขตบน (U) ของช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ μ จาก $L=g^{-1}(c)$ และ $U=g^{-1}(c), U>L$ โดยที่ $c=\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ แล้วตรวจสอบว่าช่วงดังกล่าวนี้คลุมค่าพารามิเตอร์ μ ที่ระบุในข้อ 4.1 หรือไม่ พร้อมทั้งคำนวณความยาวของช่วง $l=U-L$ ที่ได้

4.5 ทำซ้ำข้อ 4.1–4.4 จำนวน 10,000 ครั้ง แล้วให้สัดส่วนของจำนวนครั้งที่ช่วง (L, U) คลุมค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงเป็นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวม และความยาวช่วงโดยเฉลี่ยหาได้จาก

$$AL=\frac{\sum_{i=1}^{10000} l_i}{10000}=\frac{\sum_{i=1}^{10000}\left(U_i-L_i\right)}{10000}$$

5. ผลการศึกษาที่ได้จากการจำลอง

ตารางที่ 1 แสดงค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 95% ที่ประชากรถูกจำลองโดยมีพารามิเตอร์ (μ,λ) และใช้ตัวอย่างขนาด n ที่ต่างกันเมื่อพิจารณาพบว่า ถ้าให้ประชากรมีค่าเฉลี่ย μ เท่ากันแล้ว เมื่อ λ มีค่าเพิ่มมากขึ้นและพิจารณาขนาดตัวอย่างที่เท่ากันแล้ว ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมจะมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น ทั้งนี้เป็นเพราะความแปรปรวนและความเบ้จะมีค่าลดลงเมื่อ λ มีค่ามากขึ้นซึ่งหมายถึง หากข้อมูลมีการกระจาย/เบ้น้อยลงและกำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ให้คงที่แล้ว ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมจะมีแนวโน้มเพิ่มค่าขึ้น เช่น ประชากรที่มี (μ,λ) = (3,0.5) ที่ n = 15 มีความน่าจะเป็นคุ้มรวมเท่ากับ 0.867 แต่จะเท่ากับ 0.944 สำหรับประชากรที่มี (μ,λ) = (3,3) เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเท่าเดิม

สังเกตว่าในกรณีที่ (μ,λ) = (7,0.5) ซึ่งมีความแปรปรวนสูงเท่ากับ 686 และความเบ้เท่ากับ 11.225 จะต้องใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่ ในที่นี้จะต้องสูงถึง 60 เพื่อให้มีความน่าจะเป็นคุ้มรวมเท่ากับ 0.934 และเท่ากับ 100 เพื่อให้มีความน่าจะเป็นคุ้มรวมเท่ากับ 0.968

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและค่าความยาวเฉลี่ย (ค่าในวงเล็บ) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับ μ

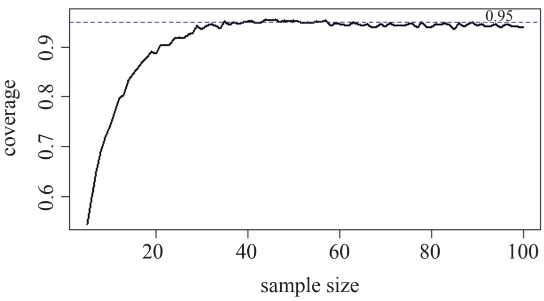
(μ,γ)	(1,0.5)	(1,1)	(1,3)	(3,0.5)	(3,1)
n = 5	0.7953 (4.944)	0.8732 (4.883)	0.9020 (2.087)	0.5620 (6.859)	0.7189 (9.201)
10	0.9245 (5.737)	0.9329 (2.879)	0.9300 (0.878)	0.7728 (10.433)	0.8910 (12.309)
15	0.9456 (4.350)	0.9426 (1.581)	0.9425 (0.658)	0.8674 (12.341)	0.9356 (12.564)
30	0.9508 (1.486)	0.9499 (0.839)	0.9470 (0.433)	0.9521 (13.589)	0.9533 (7.384)
45	0.9540 (1.040)	0.9505 (0.637)	0.9458 (0.347)	0.9644 (10.647)	0.9535 (4.405)
60	0.9544 (0.836)	0.9533 (0.539)	0.9521 (0.298)	0.9590 (7.486)	0.9544 (3.378)
100	0.9542 (0.605)	0.9546 (0.403)	0.9514 (0.228)	0.9591 (4.039)	0.9578 (2.326)

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและค่าความยาวเฉลี่ย (ค่าในวงเล็บ) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับ μ (ต่อ)

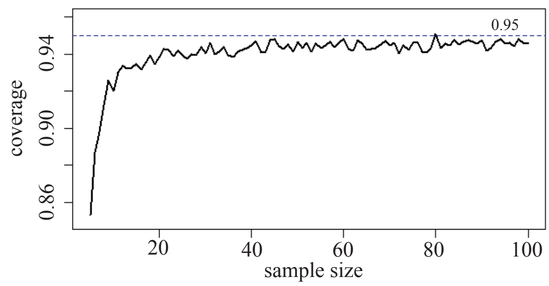
(μ,γ)	**(3,3)**	**(7,0.5)**	**(7,1)**	**(7,3)**
n = 5	0.8657 (10.111)	0.3198 (7.360)	0.4933 (10.755)	0.7544 (16.124)
10	0.9338 (7.652)	0.5162 (11.281)	0.7037 (15.323)	0.9053 (19.926)
15	0.9441 (4.658)	0.6353 (14.022)	0.8202 (18.405)	0.9440 (20.091)
30	0.9501 (2.493)	0.8294 (18.739)	0.9359 (22.031)	0.9554 (12.345)
45	0.9469 (1.918)	0.8991 (21.267)	0.9606 (21.101)	0.9556 (8.226)
60	0.9528 (1.608)	0.9341 (21.824)	0.9670 (17.966)	0.9565 (6.558)
100	0.9530 (1.209)	0.9678 (20.551)	0.9631 (10.794)	0.9568 (4.653)

เมื่อพิจารณาความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นในตารางที่ 1 พบว่าเมื่อประชากรที่ศึกษามีความเบ้น้อย เช่น กรณี $(\mu,\lambda) = (1,1), (3,3)$ ซึ่งมีความเบ้เท่ากันเท่ากับ 3 เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้น ความยาวเฉลี่ยมีแนวโน้มที่จะลดลงแต่ในกรณีที่ประชากรมีความเบ้สูง เช่น กรณี $(\mu,\lambda) = (3,0.5), (7,1)$ ซึ่งมีความเบ้เท่ากับ 7.35 และ 7.94 ตามลำดับ ในตอนแรกเริ่ม ความยาวเฉลี่ยจะมีค่าน้อยแล้วค่อยๆ เพิ่มค่าขึ้นจนกระทั่งถึงขนาดตัวอย่าง n ที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมใกล้เคียง .95 แล้วค่าความยาวเฉลี่ยจะมีค่าลดลงเมื่อ n เพิ่มค่าขึ้น

จากรูปที่ 1 และ 2 แสดงตัวอย่างพล็อตค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมกับขนาดตัวอย่าง สำหรับประชากรเป็น $IG(\mu = 3, \lambda = 0.5)$ และ $IG(\mu = 3, \lambda = 3)$ ซึ่งมีความเบ้เท่ากับ $3\sqrt{3/0.5} = 7.35$ และ $3\sqrt{3/3} = 1$ ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อประชากรมีความเบ้น้อย (ความแปรปรวนต่ำ) แม้ขนาดตัวอย่างไม่ใหญ่ เช่น $n = 15$ จะให้ความน่าจะเป็นคุ้มรวมใกล้เคียง 0.95



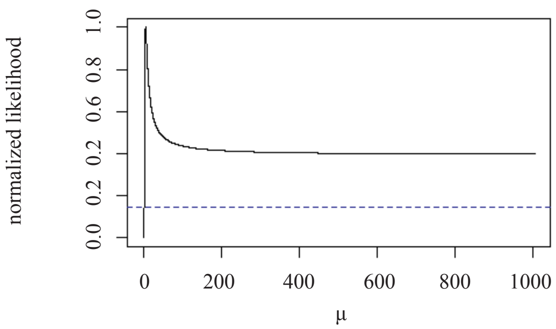
รูปที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% ที่ใช้ภาวะน่าเป็นโปรไฟล์ เมื่อ $X \sim IG(\mu = 3, \lambda = 0.5)$ ที่ $n = 5,6,...,100$



รูปที่ 2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% ที่ใช้ภาวะน่าเป็นโปรไฟล์ที่ เมื่อ $X \sim IG(\mu = 3, \lambda = 3)$ ที่ $n = 5,6,...,100$

6. อภิปรายและสรุป

การสร้างช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์นั้นสามารถกระทำได้สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบทั้งพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย (μ) และพารามิเตอร์รูปร่าง (λ) โดยกำจัดพารามิเตอร์รบกวน λ ด้วยการใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ อย่างไรก็ตามไม่ได้ทุกตัวอย่างที่สุ่มจะสามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ ดังแสดงในทฤษฎีบท 3 ว่าฟังก์ชัน $L(\mu,\tilde{\lambda})/\max L(\mu,\tilde{\lambda})$ ไม่จำเป็นต้องลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $\mu \to \infty$ ซึ่งอาจแสดงด้วยตัวอย่างขนาด 30 ที่จำลองขึ้น (กำหนด set.seed เท่ากับ 342019 ในโปรแกรม R) แล้วเมื่อนำมาพล็อตฟังก์ชัน $L(\mu,\tilde{\lambda})/\max L(\mu,\tilde{\lambda})$ ซึ่งแสดงในรูปที่ 3 จะเห็นว่าไม่สามารถหาค่าของขอบเขตบน U ของช่วงความเชื่อมั่น 95% เพราะไม่มีค่า U ที่ทำให้สมการ



รูปที่ 3 ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์เมื่อ μ มีค่าเพิ่มค่าขึ้นจนกระทั่ง 1,000

$$\frac{L(U,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})} = 0.1465$$

เป็นจริง (หมายเหตุ ค่าของ $e^{-\chi^2_{1,0.95}/2}$ เท่ากับ 0.1465) เนื่องจาก $\lim_{\mu\to\infty} L(U,\tilde{\lambda})/\max L(\mu,\tilde{\lambda})$ ยังคงมากกว่า 0.1465 (เส้นปะ)

ในกรณีที่ตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่ทราบค่าพารามิเตอร์ λ จะสามารถประมาณความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างหนึ่งๆ จะใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ตามทฤษฎีบท 4

จากผลการศึกษาที่ใช้การจำลองในหัวข้อที่ 5 จะสามารถหาขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมสำหรับการสร้างช่วงความเชื่อมั่น 95% ซึ่งในที่นี้นิยามโดยให้เป็นขนาดตัวอย่างที่ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมอย่างน้อย $(1 - \alpha) - 0.01$ ดังแสดงในตารางที่ 2 ซึ่งสรุปได้ว่า ยิ่งประชากรเบ้ (ทางขวา) มากเท่าไรขนาดตัวอย่างมีแนวโน้มที่จะต้องเพิ่มขึ้นมากเท่านั้น เพื่อให้มีระดับความเชื่อมั่นเป็นไปตามที่กำหนด

ตารางที่ 2 ขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมสำหรับการสร้างช่วงภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ที่ระดับเชื่อมั่น 95% ของ μ

ค่าเฉลี่ย (μ)	**รูปร่าง (λ)**		
	0.5	1	3
1	15 (4.24)	15 (3.00)	15 (1.73)
3	30 (7.35)	30 (5.20)	15 (3.00)
7	100 (11.22)	45 (7.94)	15 (4.58)

ค่าในวงเล็บ คือ ความเบ้ของการแจกแจงซึ่งคำนวณจาก $3\sqrt{\mu/\lambda}$

ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะว่า ในกรณีที่มีตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ λ การประมาณค่าความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างหนึ่งๆ จะสามารถใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ ยังคงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ การหาช่วงความเชื่อมั่นอาจใช้วิธีการสุ่มซ้ำช่วยในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็ก

เอกสารอ้างอิง

[1] R. A. Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference*. New York: Macmillan, 1973.

[2] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis*, 3rd ed. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2014.

[3] C. A. Rohde, *Introductory Statistical Inference with the Likelihood Function*, 1st ed. London: Springer, 2014.

[4] S. S. Wilk, "The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses," *Annals Mathematical Statistics*, vol. 9, pp. 60–62, 1938.

[5] Y. Pawitan, *In All Likelihood: Statistical Modeling and Inference Using Likelihood*, 1st ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.

[6] M. E. Wise, "Skew distributions in Biomedicine including some with negative powers of time," *NATO Advanced Study Institutes Series*, vol. 17, pp. 241–262, 1975.

[7] N. N. Leonenkoa, S. Petherick, and A. Sikorskii, "A normal inverse Gaussian model for a risky asset with dependence," *Statistics and Probability Letters*, vol. 82, pp. 109–115, 2012.

[8] X. Liu, N. Li, and Y. Hu, "Combining inferences on the common mean of several inverse Gaussian distributions based on confidence distribution," *Statistics and Probability Letters*, vol. 105, pp. 136–142, 2015.

[9] C. W. Chou and W. J. Huang, "On characterizations of the gamma and generalized inverse Gaussian distributions," *Statistics and Probability Letters*, vol. 69, pp. 381–388, 2004.

[10] J. L. Folks and R. S. Chhikara, "The inverse Gaussian distribution and its Statistical application—A review," *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, vol. 40, no. 3, pp. 263–289, 1978.

[11] M. Arefi, G. R. Mohtashami Borzadaran, and Y. Vaghei, "A note on interval estimation for the mean of inverse Gaussian distribution," *Statistics and Operations Research Transactions*, vol. 32, no. 1, 2008.

[12] G. Zhang, "Simultaneous confidence intervals for several inverse Gaussian populations," *Statistics and Probability Letters*, vol. 92, pp. 125–131, 2014.

[13] R Core Team (2015, April). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, *R Foundation for Statistical Computing* [Online]. Available: https://www.R-project.org.