# รงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในทฤษฎีกราฟ

***บริบูรณ์ ศรีมาชัย***
*ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม*

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08-1775-7358 อีเมล: bboons@yahoo.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.02.005
รับเมื่อ 21 ธันวาคม 2558 ตอบรับเมื่อ 29 กุมภาพันธ์ 2559 เผยแพร่ออนไลน์ 23 มีนาคม 2559


**บทคัดย่อ**

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมาย คือ 1) เพื่อหาค่าขอบเขตที่เหมาะสมของรงคเลขของเส้นของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นของกราฟต้นฉบับ 2) เพื่อหาค่ารงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อสำหรับการเชื่อมด้วยลักษณะเฉพาะ 3) เพื่อจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อมในทฤษฎีกราฟที่ได้จากข้อ 1) และ 2) ผลการวิจัยพบว่าขอบเขตบนของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อคือ ผลรวมของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และขอบเขตล่างของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อคือ ค่ามากสุดของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และพบว่าเงื่อนไขสำหรับรอยเชื่อมกราฟต้นฉบับที่เป็นกราฟบริบูรณ์ที่เป็นเลขคู่และเลขคี่ ค่ารงคเลขของเส้นเชื่อมเท่ากับผลรวมของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับลดลง 1 หรือเพิ่มขึ้น 1 ตามลำดับ นอกจากนั้น พบว่าการจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่าย โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อมในทฤษฎีกราฟ ได้กราฟแทนระบบเครือข่ายโดยที่ จุดแทนช่วงเวลาที่ต้องการในการทำงาน ซึ่งจุดสองจุดใด ๆ จะมีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อ ช่วงเวลาที่ต้องการทำงานสิ่งเดียวกันคาบเกี่ยวกัน และการเชื่อมต่อกราฟมีการประยุกต์ให้กราฟที่ 1 แทนระบบเครือข่ายที่ 1 และกราฟที่ 2 แทนระบบเครือข่ายที่ 2 เส้นสองเส้นใด ๆ จะให้สีต่างกันด้วยจำนวนสีเส้นเชื่อมที่น้อยที่สุด ก็ต่อเมื่อมีการทำงานสิ่งเดียวกันในช่วงเวลาที่คาบเกี่ยวกัน และจำนวนสีเส้นเชื่อมแทนจำนวนชิ้นงานที่เพียงพอต่อความต้องการ และประหยัดทรัพยากรภายในช่วงเวลาที่กำหนดตามช่วงของขอบเขตที่ได้จากทฤษฎีบทหลักเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อม คือ $\max\{\chi'(G_1),\chi'(G_2)\} \le \chi'(G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2) \le \chi'(G_1)+\chi'(G_2)+k$ เมื่อ $k = \left|\{uv \mid u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}\right|$

**คำสำคัญ**: กราฟเชื่อมต่อ รอยเชื่อม การระบายสีเส้นเชื่อม

การอ้างอิงบทความ: บริบูรณ์ ศรีมาชัย, "รงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในทฤษฎีกราฟ," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 26, ฉบับที่ 2, หน้า 279–288, พ.ค.–ส.ค. 2559

# Edge Chromatic Numbers of Welded Graphs in Graph Theory

***Boriboon Srimachai***
*Assistant Professor, Program of Mathematics, Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok, Thailand*

* Corresponding Author, Tel. 08-1775-7358, E-mail: bboons@yahoo.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.02.005
Received 21 December 2015; Accepted 29 February 2016; Published online: 23 March 2016


**Abstract**

The purposes of this research are 1) to find bounds of the edge-chromatic numbers of welded graphs in terms of the edge-chromatic numbers of their original graphs, 2) to find values for the edge-chromatic numbers of welded graphs for specific welding, and 3) to find link scheduling in networks by using edge coloring in graph theory as of 1) and 2). The research results obtained are as follows: the upper bound for the edge-chromatic numbers of welded graphs is the sum of the edge-chromatic numbers of their original graphs, and the lower bound for which is the maximum of the edge-chromatic numbers of their original graphs. The conditions for complete patch of the edge-chromatic numbers for odd or even complete original graphs are the sums of their original graph edge-chromatic numbers plus or minus 1 respectively. Moreover, the applications of link scheduling in networks by using edge coloring in graph theory are: any two connected graphs represent a connection of two networks in which a vertex means a period of working time for a task. Any two vertices can be connected if and only if the periods of the task working time overlap each other; and, any two edges can be colored differently if and only if there is a task is effectively performed in the overlap bounded period, taking into account edge-chromatic numbers of welded graphs based on the principal theorem as $\max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} \le \chi'(G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2) \le \chi'(G_1) + \chi'(G_2) + k$, where $k = \left|\{uv \mid u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}\right|$.

**Keywords**: Welded Graph, Patch, Edge Coloring

Please cite this article as: B. Srimachai, "Edge chromatic numbers of welded graphs in graph theory," *The Journal of KMUTNB.*, vol. 26, no. 2, pp. 279–288, May.–Aug. 2016 (in Thai).

## 1. บทนำ

ทฤษฎีกราฟเป็นศาสตร์ที่ระบบมีองค์ประกอบหลัก 2 สิ่ง ได้แก่จุดและเส้นเชื่อม และมีการกำหนดสมบัติเบื้องต้นของจุดและเส้นเชื่อม สามารถนำไปแก้ปัญหาเกี่ยวกับวิถีทางเดินเชื่อมระหว่างสถานที่ต่าง ๆ นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจและพัฒนาทฤษฎีกราฟทั้งที่สร้างคุณลักษณะและสมบัติเพิ่มเติมแล้วนำไปใช้กับสถานการณ์จริงหรือกลับกันทำให้ศาสตร์ด้านนี้ขยายองค์ความรู้ครอบคลุมการแก้ปัญหาในรูปแบบต่าง ๆ ที่มีลักษณะเฉพาะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยมีฐานองค์ความรู้เดิมให้กว้างขวางยิ่งขึ้นและพัฒนาองค์ความรู้ใหม่และงานวิจัยทางด้านทฤษฎีกราฟมีการศึกษารงคเลขแบบรวมของกราฟร่วมกันระหว่างกราฟแบ่งสองส่วน [1] และการระบายเส้นเชื่อมของกราฟร่วมกันโดยกำหนดเงื่อนไขจากรงคเลขของเส้นเชื่อม [2] การศึกษาการระบายสีเส้นเชื่อมจุดยอดที่ประชิดกันของกราฟเชิงเดี่ยวได้ว่าจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้ของกราฟ [3]

ต่อมามีการศึกษาความสมบูรณ์ของกราฟปะติดซึ่งมีกราฟต้นฉบับสมบูรณ์ และหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้จำนวนคลีก (Clique) และรงคเลขของกราฟปะติดในพจน์ของจำนวนคลีกและรงคเลขของกราฟต้นฉบับตามลำดับและเงื่อนไขที่กราฟปะติดของกราฟสมบูรณ์ยังคงเป็นกราฟสมบูรณ์ [4] และการศึกษาสมบัติและลักษณะกราฟควบคู่ภายในตนเองโดยใช้กราฟแบน พบว่าการควบคู่ภายในตนเองมี 3 รูปแบบความสัมพันธ์ที่ผสานกัน ได้แก่ การจับคู่การควบคู่ภายในตนเอง การควบคู่ภายในตนเองของกราฟและการควบคู่ภายในตนเองแบบเมทรอยด์ (Matroid) และมีการจำแนกการควบคู่ย่อยระหว่างด้านของกราฟแบบสมนัยกันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง [5] ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาเพิ่มเติมความสัมพันธ์ระหว่างสองกราฟใด ๆ ที่สามารถนำมาเชื่อมต่อกันได้ ศึกษาลักษณะเฉพาะและเงื่อนไขของกราฟที่ได้จากการเชื่อมต่อที่สัมพันธ์กับกราฟต้นฉบับโดยเฉพาะการหาขอบเขตล่าง ขอบเขตบน และเงื่อนไขของรงคเลขที่ทำให้เกิดการเชื่อมต่อของกราฟโดยที่ยังคงความสัมพันธ์กับกราฟต้นฉบับ ซึ่งมีการกำหนดขอบเขตต่ำสุดและสูงสุด สามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีการระบายสีเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อกับสถานการณ์จริงในการจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายให้มีประสิทธิภาพ งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เพื่อหาค่าขอบเขตที่เหมาะสมของรงคเลขของเส้นของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นของกราฟต้นฉบับ 2) เพื่อหาค่ารงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อสำหรับการเชื่อมด้วยลักษณะเฉพาะ และ 3) เพื่อจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อมในทฤษฎีกราฟที่ได้จากข้อ 1 และ 2

**นิยามศัพท์เฉพาะ**

**นิยาม 1** สำหรับกราฟ $G$ กำหนดให้ $n \geq 2$ ถ้า $V(G)$ สามารถแบ่งเป็นผลแบ่งกั้น $n$ ส่วน สมมติเป็น $V_1, V_2,... V_n$ ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมใดของ $G$ เชื่อมจุดยอดในเซตเดียวกัน เรียก $V_1, V_2,... V_n$ ว่าเซตแบ่งส่วนของ $G$ และเรียกกราฟ $G$ ว่ากราฟ $n$ ส่วน [6]

**นิยาม 2** กราฟบริบูรณ์ คือกราฟที่มีอันดับ $n$ ซึ่งจุดยอดสองจุดที่แตกต่างกันจะมีเส้นเชื่อมกัน เขียนแทนด้วย $K_n$ [6]

**นิยาม 3** กราฟปะติดคือกราฟที่ได้จากการรวมกราฟสองกราฟที่ไม่มีจุดยอดร่วมกันโดยการปะติดจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟย่อยเชื่อมโยงที่มีเส้นเชื่อมอย่างน้อยหนึ่งเส้นของทั้งสองกราฟนั้น ซึ่งเรียกกราฟย่อยที่กล่าวมาว่ากราฟโคลนและเรียกกราฟสองกราฟที่ไม่มีจุดยอดร่วมกันว่ากราฟต้นฉบับ [7]

**นิยาม 4** คลีกของกราฟ $G$ คือ กราฟย่อยของ $G$ ที่เป็นกราฟบริบูรณ์จำนวนคลีกของกราฟ $G$ คือจำนวนจุดยอดของคลีกที่ใหญ่ที่สุดของ $G$ เขียนแทนด้วย $\omega(G)$ [6]

**นิยาม 5** คลีกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของกราฟ $G$ คือคลีกของกราฟ $G$ ที่ไม่เป็นกราฟย่อยของคลีกที่ใหญ่กว่า [6]

**นิยาม 6** การระบายสีของกราฟ $G$ คือ ฟังก์ชัน $f: V(G) \rightarrow [s]$ และเรียกการระบายสีดังกล่าวว่า การระบายสีแท้ (Proper Coloring) ถ้าการระบายสีนั้นมีสมบัติว่าจุดที่ประชิดกันจะต้องให้สีต่างกัน [6]

**นิยาม 7** รงคเลข (Chromatic Number) ของกราฟ $G$ คือ จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการให้สีจุดยอดของกราฟโดยจุดยอดที่ประชิดกันจะต้องให้สีต่างกัน เขียนแทนด้วย $\chi(G)$ [6]

**นิยาม 8** การระบายสีเส้นเชื่อม (Edge-Coloring) ของกราฟ $G$ คือ ฟังก์ชัน $f : E(G) \to [s]$ ซึ่งและเรียกการระบายสีดังกล่าวว่า การระบายสีเส้นเชื่อมแท้ (Proper Edge-Coloring) ถ้าการระบายสีนั้นมีสมบัติว่า เส้นเชื่อมที่ประชิดกันจะต้องให้สีต่างกัน [6]

**นิยาม 9** รงคเลขของเส้นเชื่อม (Edge-Chromatic Number) ของกราฟ $G$ คือ จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการให้สีเส้นเชื่อมของกราฟ โดยเส้นเชื่อมที่ประชิดกันจะต้องให้สีต่างกันเขียนแทนด้วย $\chi'(G)$ [6]

**นิยาม 10** รงคเลขแบบรวมของกราฟ $G$ คือจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการให้สีจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟโดยจุดยอดที่ประชิดกันจะต้องให้สีต่างกัน เส้นเชื่อมที่ประชิดกันจะต้องให้สีต่างกัน และจุดยอดกับเส้นเชื่อมที่ตกกระทบกันจะต้องให้สีต่างกัน เขียนแทนด้วย $\chi_T(G)$ [6]

**นิยาม 11** กราฟเชิงเดี่ยว คือกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมซึ่งมีจุดปลายทั้งสองจุดเป็นจุดเดียวกันซึ่งเรียกว่าวงวน และไม่มีเส้นเชื่อมมากกว่า 1 เส้นซึ่งมีจุดปลายทั้งสองจุดเป็นคู่เดียวกันซึ่งเรียกว่าเชิงซ้อน [6]

**นิยาม 12** ฟังก์ชันสมสัณฐาน (Isomorphism) จากกราฟเชิงเดี่ยว $G$ ไปยังกราฟเชิงเดี่ยว $H$ คือฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง $f : V(G) \to V(H)$ ซึ่ง $uv \in E(G)$ ก็ต่อเมื่อ $f(u)\,f(v) \in E(H)$ เราเรียกว่า $G$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน กับ $H$ เขียนแทนด้วย $G \cong H$ [6]

**นิยาม 13** ผลผนวกไม่ร่วมกันของกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ซึ่งไม่มีจุดร่วมกันเขียนแทนด้วย $G_1 + G_2$ คือกราฟที่ประกอบด้วย $V(G_1) \cup V(G_2)$ และ $E(G_1) \cup E(G_2)$ เป็นเซตของจุดและเซตของเส้นเชื่อมตามลำดับ [6]

**นิยาม 14** กราฟร่วมกันของกราฟเชิงเดี่ยว $G_1$ และ $G_2$ เขียนแทนด้วย $G_1 \vee G_2$ คือกราฟที่ได้จากผลผนวกไม่ร่วมกัน $G_1 + G_2$ โดยเพิ่มเส้นเชื่อม $\{xy \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$ [6]

**นิยาม 15** ให้ $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟเชิงเดี่ยวที่ไม่มีจุดร่วมกัน และให้ $H_1$ และ $H_2$ เป็นกราฟย่อยเชื่อมโยงของ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับ กราฟเชื่อมต่อ (Welded Graph) ของ $G_1$ และ $G_2$ ที่ $H_1$ และ $H_2$ แทนด้วย $G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$ คือกราฟที่เป็นผลรวมของ $G_1$ และ $G_2$ ซึ่งประกอบด้วย เซตของจุด $V(G_1) \cup V(G_2)$ และเซตเส้นเชื่อม $E(G_1) \cup E(G_2)$ $\{xy \mid x \in V(H_1), y \in V(H_2)\}$ เรียกกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ว่ากราฟต้นฉบับและเรียกกราฟย่อย $H_1$ และ $H_2$ ว่ารอยเชื่อม (Patch) กราฟเชื่อมต่อของ $G_1$ และ $G_2$ เขียนแทนด้วย $G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$ หมายความว่ามีกราฟย่อยเชื่อมโยง $H_1$ และ $H_2$ ของ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับ ที่ทำให้ $G_1 \nabla G_2 \cong G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$

## 2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎี ซึ่งมีประโยชน์ในการพัฒนาองค์ความรู้ทางทฤษฎีกราฟ และสามารถนำผลงานวิจัยไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในชีวิตประจำวัน โดยผู้วิจัยสร้างทฤษฎีบทและพิสูจน์ทฤษฎีบทเพื่อยืนยันว่าเป็นจริง ดังนี้

2.1 ศึกษาทฤษฎีกราฟการดำเนินการระหว่างกราฟสองกราฟ

2.2 ศึกษานิยาม ทฤษฎี และสมบัติต่าง ๆ ของรงคเลขของกราฟและศึกษางานวิจัยเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับรงคเลขของกราฟที่ได้จากการดำเนินการระหว่างกราฟสองกราฟ

2.3 นิยามเงื่อนไขและข้อคาดการณ์ ดังนี้

กำหนดนิยามกราฟเชื่อมต่อซึ่งได้จากการดำเนินการอย่างหนึ่งระหว่างกราฟสองกราฟเพื่อศึกษาผลการดำเนินการซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะต่าง ๆ ของกราฟเชื่อมต่อ รวมทั้งการเชื่อมต่อกราฟระหว่างกราฟชนิดเดียวกัน และศึกษาลักษณะเฉพาะของกราฟเชื่อมต่อ และหาเงื่อนไขที่ทำให้กราฟเชื่อมต่อเป็นกราฟชนิดเดียวกับกราฟต้นฉบับ แล้วจงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และกำหนดข้อคาดการณ์และพิสูจน์ผลสรุปที่เป็นจริง

2.4 อธิบายการประยุกต์กับการจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่าย โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อมในทฤษฎีกราฟ ที่ได้จาก ข้อ 2.3 โดยให้กราฟแทนแบบจำลองของการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายสองเครือข่าย

2.5 นำผลการพิสูจน์ที่ได้ให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่านเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

2.6 เสนอแนะข้อคาดการณ์อื่นๆ หรือปัญหาเปิดที่น่าสนใจเพื่อเป็นแนวทางในการวิจัยเกี่ยวกับกราฟเชื่อมต่อในโครงการวิจัยต่อไป

**การวิเคราะห์ข้อมูล**: ในงานวิจัยนี้เป็นการศึกษารงคเลขของกราฟเชื่อมต่อจะหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และหาเงื่อนไขสำหรับกราฟต้นฉบับ หรือเงื่อนไขสำหรับรอยเชื่อมที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับซึ่งมีข้อคาดการณ์ซึ่งจะได้พิสูจน์บนพื้นฐานนิยาม 1–15 ตามเอกสารอ้างอิง [6], [7] สำหรับข้อคาดการณ์ 1 และ 2 เชื่อมโยงเอกสารอ้างอิง [4], [5] และข้อคาดการณ์ 3–8 เชื่อมโยงเอกสารอ้างอิง [1]–[3] ดังนี้

1. สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $|V(G_1 \nabla G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$

2. สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $|E(G_1 \nabla G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)|$

3. สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \nabla G_2) \leq \chi'(G_1) + \chi'(G_2) + k$

4. สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \nabla G_2) \leq \chi'(G_1 \vee G_2)$

5. สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \nabla G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$

6. สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ซึ่ง $|V(G_1)| \geq m$ และ $|V(G_2)| \geq n$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2), m + n - 1\}$

7. สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ถ้า $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีจุดยอดมากกว่า 1 จุด และ $e_1 = u_1 v_1 \in E(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2)$ เมื่อ $u_1 \in V(K_1) \subseteq V(G_1)$ และ $v_1 \in V(K_1) \subseteq V(G_1)$

7.1 ถ้า $u_1$ เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$ ซึ่ง $\chi'(G_1) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$ หรือ $v_1$ เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_2$ ซึ่ง $\chi'(G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$ แล้ว $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} + 1$

7.2 ถ้า $u_1$ และ $v_1$ ไม่เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับ แล้ว $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$

8. ให้ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

8.1 ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_m) + \chi'(K_n) - 1$

8.2 ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_m) + \chi'(K_n) + 1$

## 3. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

### 3.1 ผลการวิจัย

3.1.1 ค่าขอบเขตที่เหมาะสมของรงคเลขของเส้นของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นของกราฟต้นฉบับ พบว่าผลการศึกษากำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายพบว่าจำนวนจุดยอดของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของจำนวนจุดยอดของกราฟต้นฉบับและหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับเป็นไปตามทฤษฎีบท 1 และ 2 ซึ่งเป็นข้อสังเกตเพื่อนำเข้าสู่การพิสูจน์ทฤษฎีหลักของวัตถุประสงค์การวิจัยต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1** สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $|V(G_1 \nabla G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$

**พิสูจน์** ให้ $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟใดๆ จากนิยามกราฟเชื่อมต่อ จะได้ว่า $V(G_1 \nabla G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$

เนื่องจาก $G_1$ และ $G_2$ ไม่มีจุดยอดร่วมกัน จะได้ว่า $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ นั่นคือ $|V(G_1) \cap V(G_2)| = 0$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|V(G_1 \nabla G_2)| &= |V(G_1) \cap V(G_2)| \\
&= |V(G_1)| + |V(G_2)| - |V(G_1) \cap V(G_2)| \\
&= |V(G_1)| + |V(G_2)| - 0 = |V(G_1)| + |V(G_2)|
\end{aligned}
$$

**ทฤษฎีบท 2** สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า

$|E(G_1 \nabla G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

**พิสูจน์** ให้ $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟใดๆ ให้ $H_1$ และ $H_2$ เป็นรอยเชื่อมของ $G_1 \nabla G_2$ จากนิยามของกราฟเชื่อมต่อ จะได้ว่า $E(G_1 \nabla G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}$

เนื่องจาก $G_1$ และ $G_2$ ไม่มีจุดยอดร่วมกัน จะได้ว่า $G_1$ และ $G_2$ ไม่มีเส้นร่วมกันดังนั้น

$E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$,

$E(G_1) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\} = \varnothing$,

$E(G_2) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\} = \varnothing$

และ $E(G_1) \cap E(G_2) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\} = \varnothing$

นั่นคือ $|E(G_1) \cap E(G_2)| = 0$,

$|E(G_1) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}| = 0$,

$|E(G_2) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}| = 0$

และ $|E(G_1) \cap E(G_2) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}| = 0$

ดังนั้น $|E(G_1 \underset{H_1, H_2}{\nabla} G_2)| = |E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

$= |E(G_1)| + |E(G_2)| + |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

$- |E(G_1)| \cap |E(G_2)| - |E(G_1) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

$- |E(G_2) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

$- |E(G_1) \cap E(G_2) \cap \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

$= |E(G_1)| + |E(G_2)| + \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

$- 0 - 0 - 0 - 0$

$= |E(G_1)| + |E(G_2)| + \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

ผลการหาขอบเขตบนของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบท 3

**ทฤษฎีบท 3** ให้ $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟใดๆ $H_1$ และ $H_2$ เป็นกราฟย่อยเชื่อมโยงของ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับ จะได้ $\chi'(G_1 \underset{H_1, H_2}{\nabla} G_2) \le \chi'(G_1) + \chi'(G_2) + k$

เมื่อ $k = |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

**พิสูจน์** ให้ $f$ และ $g$ เป็นการระบายสีเส้นเชื่อมแท้ (Proper Edge-Coloring) ของ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับ

ซึ่งได้ว่า $f : E(G_1) \to S_1$

และ $g : E(G_2) \to S_2$

เมื่อ $|S_1| = \chi'(G_1)$, $|S_2| = \chi'(G_2)$

และ $S_1 \cup S_2 = \varnothing$ ให้ $k = |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

และให้ $\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\} = \{e_1, e_2, ... e_k\}$

ให้ $R = \{r_1, r_2, ... r_k\}$ ซึ่ง $R \cap (S_1 \cup S_2) = \varnothing$

ดังนั้น $|S_1 \cup S_2 \cup R| = |S_1| + |S_2| + |R| = \chi'(G_1) + \chi'(G_2) + k$

ให้ $h : E(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \to S_1 \cup S_2 \cup R$

นิยามโดย

$$h(e) = \begin{cases} f(e) & ; e \in E(G_1) \\ g(e) & ; e \in E(G_2) \\ r_i & ; e = e_1 \end{cases}$$

สำหรับทุก $i = 1,2,...k$

จะแสดงว่า $h$ การระบายสีเส้นเชื่อมแท้ ให้ $e'$ และ $e''$ เป็นเส้นเชื่อมใน $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$ ซึ่ง $e'$ และ $e''$ ประชิดกัน

<u>กรณี 1</u> $e', e'' \in E(G_1)$ แล้ว $e'$ และ $e''$ ประชิดกันใน $G_1$ จะได้ $h(e') = f(e') \ne f(e'') = h(e'')$

<u>กรณี 2</u> $e', e'' \in E(G_2)$ แล้ว $e'$ และ $e''$ ประชิดกันใน $G_2$ จะได้ $h(e') = g(e') \ne g(e'') = h(e'')$

<u>กรณี 3</u> $e', e'' \in \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}$ แล้ว $e' = e_i$ และ $e'' = e_j$ สำหรับบาง $i, j = 1, 2,..., k$ และ $i \ne j$

จะได้ $h(e') = h(e_i) = r_i \ne r_j = h(e_j) = h(e'')$

<u>กรณี 4</u> $e' \in E(G_1)$ หรือ $E(G_2)$ และ $e'' \in \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $e' \in E(G_1)$ แล้ว $e' = e_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., k$

จะได้ $h(e') = f(e_i) \ne r_j = h(e_j) = h(e'')$

<u>กรณี 5</u> $e' \in \{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}$ และ $e'' \in E(G_1)$ หรือ $E(G_2)$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป

ให้ $e'' \in E(G_1)$ แล้ว $e' = e_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., k$

จะได้ $h(e') = h(e_i) = r_i \ne f(e'') = h(e'')$

แสดงว่า $h$ การระบายสีเส้นเชื่อมแท้

ดังนั้น $\chi'(G_1 \underset{H_1, H_2}{\nabla} G_2) \le \{\chi'(G_1) + \chi'(G_2)\} + k$

เมื่อ $k = |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

เนื่องจากกราฟ $G_1 \vee G_2$ จะมีเส้นเชื่อมที่ได้จากการเพิ่มเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งหมดใน $G_1$ และจุดยอดทั้งหมดใน $G_2$ แต่สำหรับกราฟเชื่อมต่อ $G_1 \nabla G_2$ จะมีเส้นเชื่อมที่ได้จากการเพิ่มเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด

ในกราฟย่อยของ $G_1$ และจุดยอดในกราฟย่อยของ $G_2$ ดังนั้นเมื่อเปรียบเทียบรงคเลขของเส้นเชื่อมของทั้งสองกราฟ จะได้ว่ารงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อจะไม่เกินรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อดังทฤษฎีบท 4

**ทฤษฎีบท 4** สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \nabla G_2) \leq \chi'(G_1 \vee G_2)$

**พิสูจน์** ให้ $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟใดๆ เนื่องจาก $G_1 \nabla G_2$เป็นกราฟย่อยของ $G_1 \vee G_2$
ดังนั้น $\chi'(G_1 \nabla G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$

สำหรับขอบเขตล่างของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ แสดงดังทฤษฎีบท 5

**ทฤษฎีบท 5** สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \nabla G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$

**พิสูจน์** ให้ $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟใดๆ เนื่องจาก $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟย่อยของ $G_1 \nabla G_2$
ดังนั้น $\chi'(G_1 \nabla G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$

เมื่อพิจารณากราฟเชื่อมต่อที่มีรอยเชื่อมเป็นกราฟบริบูรณ์ ทำให้ได้ขอบเขตล่างของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ ดังทฤษฎีบท 6

**ทฤษฎีบท 6** สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ซึ่ง $|V(G_1)| \geq m$ และ $|V(G_2)| \geq n$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2), m+n-1\}$

**พิสูจน์** ให้ $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟ ซึ่ง $|V(G_1)| \geq m$ และ $|V(G_2)| \geq n$ เนื่องจากจุดยอดทุกจุดใน $K_m$ และ $K_n$ จะประชิดกันใน $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ จะได้ว่า $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ จะบรรจุกราฟย่อย $K_{m+n}$ เนื่องจาก $G_1, G_2$ และ $K_{m+n}$ เป็นกราฟย่อยของ $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ จะได้ว่า $\chi'(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2), m+n-1\}$
เนื่องจาก $\chi'(K_{m+n}) \geq \Delta(K_{m+n}) = m+n-1$
ดังนั้น $\chi'(G_1 \nabla G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2), (K_{m+n})\}$

สรุปว่าทฤษฎีบท 3–6 เป็นการจัดกำหนดการขอบเขตบนแสดงค่ามากสุดและขอบเขตล่างแสดงค่าน้อยสุดของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับเพื่อจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่าย

3.1.2 หาค่ารงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อสำหรับการเชื่อมด้วยลักษณะเฉพาะ เงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับได้เงื่อนไขสำคัญที่กำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายตามจุดมุ่งหมายข้อ 2 เป็นไปตามทฤษฎีบท 7 และ 8 ต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 7** สำหรับกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ถ้า $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีจุดยอดมากกว่า 1 จุด และ $e_1 = u_1 v_1 \in E(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2)$ เมื่อ $u_1 \in V(K_1) \subseteq V(G_1)$ และ $v_1 \in V(K_1) \subseteq V(G_2)$

1) ถ้า $u_1$ เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$ ซึ่ง $\chi'(G_1) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$ หรือ $v_1$ เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_2$ ซึ่ง $\chi'(G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$
แล้ว $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} + 1$

2) ถ้า $u_1$ และ $v_1$ ไม่เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับ แล้ว $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$

**พิสูจน์** โดยไม่เสียนัย ให้ $\chi'(G_1) \geq \chi'(G_2)$

1) สมมติ $u_1$ เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$ เนื่องจาก $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟย่อยของ $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$ และ $e_1$ เป็นเส้นเชื่อมของ $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$ ที่เชื่อมระหว่างจุด $u_1$ และ $v_1$ ซึ่ง $u_1$ เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$
ซึ่ง $\chi'(G_1) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$
จะได้ว่า $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} + 1$
ให้ $\chi'(G_1) = m$ และ $\chi'(G_2) = n$
จะมีการระบายสีเส้นเชื่อมแท้ (Proper Edge Coloring)

$$f : E(G_1) \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

และ $g : E(G_2) \to \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
เลือก $c \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
ให้ $h : E(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m, c\}$
นิยามโดย

$$h(e) = \begin{cases} f(e) & ; e \in E(G_1) \\ a_i & ; e \in E(G_2) \\ c & ; e = e_1 \end{cases}$$

และ $g(e) = b_i$ ทุก $i = 1, 2,..., n$ จะแสดงว่า $h$ เป็นการระบายสีเส้นเชื่อมแท้

ให้ $e'$ และ $e''$ เป็นเส้นเชื่อมใน $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$ ซึ่ง $e'$ และ $e''$ ตกกระทบกัน

กรณี 1 $e', e'' \in E(G_1)$ แล้ว $e'$ และ $e''$ ตกกระทบกันใน $G_1$
ดังนั้น $h(e') = f(e') \neq f(e'') = h(e'')$

กรณี 2 $e', e'' \in E(G_2)$ แล้ว $e'$ และ $e''$ ตกกระทบกันใน $G_2$ จะได้ว่า $g(e') \neq g(e'')$ และ $g(e') = b_i$ และ $g(e'') = b_j$ สำหรับบาง $i, j = 1, 2,..., n$ ซึ่ง $i \neq j$
ดังนั้น $h(e') = a_i \neq a_j = h(e'')$

กรณี 3 $e' = e_1$ หรือ $e'' = e_1$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $e' = e_1$
ถ้า $e'' \in E(G_1)$ แล้ว $h(e') = h(e_1) = c \neq f(e'') = h(e'')$
ถ้า $e'' \in E(G_2)$ แล้ว $g(e'') = b_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., n$
จะได้ $h(e') = h(e_1) = c \neq a_i = h(e'')$
จะแสดงว่า $h$ เป็นการระบายสีเส้นเชื่อมแท้
จะได้ว่า $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \leq m + 1 = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} + 1$
สรุปว่า $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} + 1$

2) สมมติ $u_1$ และ $v_1$ ไม่เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับเนื่องจาก $G_1$ และ $G_2$ เป็นกราฟย่อยของ $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$
จะได้ว่า $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$
ให้ $\chi'(G_1) = m$ และ $\chi'(G_2) = n$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป
ให้ $m \geq n$ จะได้ว่า $\Delta(G_1) \geq \Delta(G_2)$
ดังนั้น $d(v_1) < \Delta(G_2) \leq \Delta(G_1) \leq \chi'(G_1) = m$
จะมีการระบายสีเส้นเชื่อมแท้

$$g : E(G_2) \to \{b_1, b_2,..., b_n\}$$

และ $f : E(G_1) \to \{a_1, a_2,..., a_m\}$
เมื่อ $\{a_1, a_2,..., a_m\} \cap \{b_1, b_2,..., b_n\} \neq \phi$
ให้ $b_1, b_2,..., b_{d(v_1)} \in [\{e \in E(G_2)|e$ ตกกระทบกับ
เนื่องจาก $u_1$ และ $v_1$ ไม่เป็นจุดที่มีดีกรีสูงสุดในกราฟ $G_1$ และ $G_2$ ตามลำดับจะมีเส้นเชื่อม $e_2$ ในกราฟ $G_1$ ที่ไม่ตกกระทบกับจุด $u_1$
ซึ่ง $f(e_2) = a_m$ เมื่อ $a_m \notin f[\{e \in E(G_1)|e$ ตกกระทบกับ $u_1\}]$
ให้ $h : E(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \to \{a_1, a_2,..., a_m\}$
นิยามโดย

$$h(e) = \begin{cases} f(e) & ; e \in E(G_1) \\ a_i & ; e \in E(G_2) \\ a_m & ; e = e_1 \end{cases}$$

และ $g(b) = b_i$ ทุก $i, j = 1, 2,..., n$ จะแสดงว่า $h$ เป็นการระบายสีเส้นเชื่อมแท้

ให้ $e'$ และ $e''$ เป็นเส้นเชื่อมใน $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$ ซึ่ง $e'$ และ $e''$ ตกกระทบกัน

กรณี 1 $e', e'' \in E(G_1)$ แล้ว $e'$ และ $e''$ ตกกระทบกันใน $G_1$
ดังนั้น $h(e') = f(e') \neq f(e'') = h(e'')$

กรณี 2 $e', e'' \in E(G_2)$ แล้ว $e'$ และ $e''$ ตกกระทบกันใน $G_2$ จะได้ว่า $g(e') \neq g(e'')$ และ $g(e') = b_i$ และ $g(e'') = b_j$ สำหรับบาง $i, j = 1, 2,..., n$ ซึ่ง $i \neq j$
ดังนั้น $h(e') = a_i \neq a_j = h(e'')$

กรณี 3 $e' = e_1$ หรือ $e'' = e_1$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $e' = e_1$
ถ้า $e'' \in E(G_1)$ แล้ว $e''$ ตกกระทบกับจุด $u_1$
ดังนั้น $h(e') = h(e_1) = a_m \neq f(e'') = h(e'')$
ถ้า $e'' \in E(G_2)$ แล้ว $e''$ ตกกระทบกับจุด $v_1$ และ $g(e'') = b_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., d(v_1)$
เนื่องจาก $d(v_1) < m$
ดังนั้น $h(e') = h(e_1) = a_m \neq a_i = h(e'')$
แสดงว่า $h$ เป็นการระบายสีเส้นเชื่อมแท้
จะได้ว่า $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \leq m = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$
สรุปว่า $\chi'(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\}$
และได้ว่า $\chi'(K_1 \nabla K_2) = 1$

ต่อไปพิจารณา $\chi'(K_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_2)$ เมื่อ $m \leq n, m \geq 1$ และ $n \geq 2$ เนื่องจากเมื่อ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่พร้อมกันหรือเป็นจำนวนเต็มคี่พร้อมกัน และ $\chi'(K_{m+n}) = m + n$ เมื่อ $m$ และ $n$ ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่พร้อมกัน หรือไม่เป็นจำนวนเต็มคี่พร้อมกัน จึงได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 8** ให้ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

1) ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_m) + \chi'(K_n) - 1$

2) ถ้า $m$ หรือ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว $\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_m) + \chi'(K_n) + 1$

**พิสูจน์** เนื่องจาก $K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n \cong K_{m+n}$ จะได้ $\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_{m+n})$

1) สมมติ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่

$\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_{m+n}) = m + n - 1 = \chi'(K_m) + \chi'(K_n) - 1$

2) สมมติ $m$ หรือ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่

<u>กรณี 1</u> $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่

$\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_{m+n}) = m + n - 1 = (m-1) + (n-1) + 1 = \chi'(K_m) + \chi'(K_n) + 1$

<u>กรณี 2</u> $m$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่

$\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_{m+n}) = m + n$

$\chi'(K_{m+n}) = m + n - 1$

$= (m-1) + n + 1 = \chi'(K_m) + \chi'(K_n) + 1$

<u>กรณี 3</u> $m$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่

$\chi'(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi'(K_{m+n})$

$= m + n = m + (n-1) + 1$

$= \chi'(K_m) + \chi'(K_n) + 1$

3.1.3 จัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อมในทฤษฎีกราฟที่ได้จากข้อ 3.1.2 โดยให้กราฟแทนระบบเครือข่ายที่ประกอบด้วยเซตของจุดและเซตของเส้นเชื่อม ดังนี้ จุดแทนช่วงเวลาที่ต้องการในการทำงาน ซึ่งจุดสองจุดใด ๆ จะมีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อช่วงเวลาที่ต้องการทำงานสิ่งเดียวกันคาบเกี่ยวกัน

สำหรับการเชื่อมต่อกราฟมีความหมาย ดังนี้ กราฟที่ 1 แทนระบบเครือข่ายที่ 1 และกราฟที่ 2 แทนระบบเครือข่ายที่ 2 โดยที่จุดของกราฟทั้งสองกราฟจะเชื่อมต่อกัน ก็ต่อเมื่อช่วงเวลาที่ต้องการทำงานสิ่งเดียวกันของระบบเครือข่ายทั้งสองคาบเกี่ยวกันทั้งหมด

สำหรับการระบายสีเส้นเชื่อมในแบบจำลองกราฟมีความหมาย ดังนี้ เส้นสองเส้นใด ๆ จะให้สีต่างกัน ก็ต่อเมื่อมีผู้ต้องการทำงานสิ่งเดียวกันในช่วงเวลาที่คาบเกี่ยวกัน และจำนวนสีเส้นเชื่อมแทนจำนวนชิ้นงานที่เพียงพอต่อความต้องการ และประหยัดทรัพยากร ภายในช่วงเวลาที่กำหนด

สำหรับรงคเลขของเส้นเชื่อม หรือจำนวนสีเส้นเชื่อมที่น้อยที่สุดแทนจำนวนชิ้นงานที่น้อยที่สุดที่เพียงพอต่อความต้องการ และประหยัดทรัพยากร ภายในช่วงเวลาที่กำหนด ซึ่งรงคเลขที่ได้จะมีค่าอยู่ระหว่างช่วงของขอบเขตที่ได้จากทฤษฎีบทหลัก ดังนี้

$\max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} \leq \{\chi'(G_1 \underset{H_1, H_2}{\nabla} G_2) \leq \chi'(G_1) + \chi'(G_2) + k$

เมื่อ $k = |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$

**3.2 อภิปรายผล**

การจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อมในทฤษฎีกราฟที่ได้จากจุดมุ่งหมาย ข้อ 1 กล่าวได้ว่าทฤษฎีบท 3–6 เป็นการจัดกำหนดการขอบเขตบนแสดงค่ามากสุดและขอบเขตล่างแสดงค่าน้อยสุดของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ เพื่อจัดกำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่าย โดยที่ทฤษฎีบท 1 และ 2 ให้เป็นข้อสังเกตจำนวนจุดและจำนวนเส้นของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของจำนวนจุดและจำนวนเส้นของกราฟต้นฉบับ ตามลำดับ เพื่อนำไปสู่การหารงคเลขดังทฤษฎีบท 3 และ 5 เป็นทฤษฎีบทหลักโดยทฤษฎีบท 3 เป็นขอบเขตบนของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ ส่วนทฤษฎีบท 5 เป็นขอบเขตล่างของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ ส่วนทฤษฎีบท 4 และ 6 เป็นการให้ข้อสังเกตเพิ่มเติมเกี่ยวกับการที่ได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่าง กล่าวคือ ในทฤษฎีบท 3 ถึง 6 เครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับและน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$, $\leq$) ระบุขอบเขตค่ารงคเลข ส่วนจุดมุ่งหมาย ข้อ 2 เงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ ผลการวิจัยพบว่าได้เงื่อนไขสำคัญที่กำหนดการเชื่อมโยงในระบบเครือข่ายตามจุดมุ่งหมายข้อ 2 เป็นไปตามทฤษฎีบท 7 และ 8 เป็นเงื่อนไขที่ทำให้

ได้รงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ กล่าวคือทฤษฎีบท 7 และ 8 เครื่องหมายเท่ากับ (=) ระบุขอบเขตค่ารงคเลขและจุดมุ่งหมาย ข้อ 3 การเชื่อมต่อกราฟมีการประยุกต์โดยให้กราฟสองกราฟแทนระบบเครือข่ายสองระบบใด ๆ ที่เชื่อต่อกันได้โดยมีการทำงานสิ่งเดียวกันที่มีช่วงเวลาทำงานคาบเกี่ยวกันซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ทำให้ทั้งสองระบบเชื่อมต่อกันที่จะทำให้เกิดประสิทธิภาพเพิ่มขึ้นโดยมีความประหยัดและเพียงพอ

## 4. สรุป

การศึกษารงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อของกราฟเชิงเดี่ยวสองกราฟใด ๆ ผลการวิจัยขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับมีทฤษฎีบทซึ่งได้รับการพิสูจน์ว่าเป็นจริงจากฐานความรู้การกำหนดนิยาม สนับสนุนข้อคาดกาณ์ได้ครบถ้วนทั้ง 8 ข้อ กล่าวคือ ได้จำนวนจุดของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของจำนวนจุดยอดของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบท 1 และหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบท 2 ได้ขอบเขตบนของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบท 3 และทฤษฎีบท 4 ขอบเขตล่างของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ แสดงดังทฤษฎีบท 5 และทฤษฎีบท 6 เงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบท 7 และทฤษฎีบท 8 นอกจากนั้น ผลการศึกษากราฟเชื่อมต่อเกี่ยวกับขอบเขตบนและขอบเขตล่าง และเงื่อนไขของรงคเลขของเส้นเชื่อมสามารถนำไปแก้ปัญหาการเชื่อมต่อการทำงานเชิงระบบระหว่างเครือข่ายของสองเครือข่ายขบนฐานข้อมูลเทคโนโลยีสารสนเทศซึ่งเชื่อมต่อระบบเข้าด้วยกันแล้วมีประโยชน์สูงสุดทั้งในเชิงความรวดเร็วและศักยภาพของการทำงานร่วมกันของสองระบบอย่างมีประสิทธิภาพ

## เอกสารอ้างอิง

[1] G. Li and L. Zhang, “Total chromatic number of one kind of join graphs,” *Discrete Mathematics*, vol. 306, pp. 1895–1905, 28 August 2006.

[2] C. Simone and C. Mello, “Edge-colouring of joingraphs,” *Theoretical Computer Science*, vol. 355, pp. 364–370, April 2006.

[3] P. N. Balister, E. Gyo″ri, J. Lehel, and R. H. Schelp, “Adjacent vertex distinguishing Edge-Colorings,” *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics*, vol. 21, no. 1, pp. 237–250, 2007.

[4] S. Saduakdee “Perfect glued graphs at complete clones.” *Journal of Mathematics Research*, vol.1, pp. 25–30, 2009.

[5] S. Lakshmi and N. Saranya, “Self-dual characterization of partial dual graphs,” *Journal of Mathematics,* vol. 10, pp. 14–25, 2014.

[6] D. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2001.

[7] C. Uiyyasathian, “Clique partitions of glued graphs,” *Journal of Mathematics Research*, vol. 2, pp. 104–111, 2010.