



## วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขของความยาวรันเฉลี่ยบนแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับกระบวนการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบมีฤดูกาล ที่มีตัวแปรภายนอก

ชินวัฒน์ เมืองแก้ว\* และ คณิตา เพ็ชรรัตน์

ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 09 5741 684 อีเมล: s6204051810019@email.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2024.03.010

รับเมื่อ 27 มกราคม 2565 แก้ไขเมื่อ 4 เมษายน 2565 ตอรับเมื่อ 22 เมษายน 2565 เผยแพร่ออนไลน์ 19 มีนาคม 2567

© 2024 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย สำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข ซึ่งในงานวิจัยนี้ศึกษาทั้งหมด 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎค่ากลาง วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู วิธีกฎของเกาส์ และวิธีกฎของซิมป์สัน เมื่อข้อมูลของกระบวนการมีตัวแปรภายนอกที่แบบมีฤดูกาลที่มีตัวแปรภายนอกทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณโดยพิจารณาความยาวรันเฉลี่ยที่ประมาณได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี นอกจากนี้ยังทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณทั้ง 4 วิธี โดยใช้เวลาที่ในการประมวลผล ผลการวิจัยพบว่าค่าความยาวรันเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข ได้แก่ วิธีกฎค่ากลาง วิธีกฎเกาส์ และวิธีกฎซิมป์สันมีค่าเท่ากัน แต่วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่าแตกต่างจากวิธีอื่นเล็กน้อย และเมื่อพิจารณาจากเวลาในการประมวลผลพบว่าวิธีกฎค่ากลาง และวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูใช้เวลาประมวลผลน้อยที่สุด โดยใช้เวลาไม่เกิน 1-2 วินาที ส่วนวิธีกฎของเกาส์ และวิธีกฎของซิมป์สัน ใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่าซึ่งใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 5-8 วินาที

**คำสำคัญ:** แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง ตัวแปรภายนอกที่แบบมีฤดูกาลที่มีตัวแปรภายนอก ความยาวรันเฉลี่ย สมการปริพันธ์เชิงตัวเลข



## Numerical Integral Equation Methods of Average Run Length on EWMA Control Chart for Seasonal Moving Average Process with Exogenous Variables

Chinnawat Muangkaeo\* and Kanita Petcharat

Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

\* Corresponding Author, Tel. 09 5741 684, E-mail: s6204051810019@email.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2024.03.010

Received 27 January 2022; Revised 4 April 2022; Accepted 22 April 2022; Published online: 19 March 2024

© 2024 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### Abstract

The purpose of this research is to evaluate the method for estimating the average run length (*ARL*) of an exponentially weighted moving average control chart using a numerical Integral equation when the process data is a seasonal moving average model with exogenous variables. Four methods are employed: the midpoint rule, the trapezoidal rule, the Gaussian rule, and Simpson's rule. The average run length values obtained using four different methods are compared. The CPU times required to perform the *ARL* evaluation are also compared. The result indicates that the *ARL* values obtained using the midpoint rule, the Gaussian rule, and Simpson's rule are very similar. However, the value obtained using the trapezoidal rule is less dissimilar. Additionally, when CPU time is considered, the midpoint and trapezoidal rules are the quickest, about 1–2 seconds. However, Gauss's and Simpson's rules require more CPU time, approximately 5–8 seconds.

**Keywords:** Exponentially Weighted Moving Average Control Chart, Seasonal Moving Average Model with External Variables, Average Run Length, Numerical Integral Equation

Please cite this article as: C. Muangkaeo and K. Petcharat , “Numerical integral equation methods of average run length on ewma control chart for seasonal moving average process with exogenous variables,” *The Journal of KMUTNB*, vol. 34, no. 2, pp. 1–10, ID. 242-165765, Apr.-Jun. 2024 (in Thai).

## 1. บทนำ

ในกระบวนการผลิตผลิตภัณฑ์ขึ้นมาชิ้นหนึ่ง ผลิตภัณฑ์นั้นอาจประกอบมาจากส่วนประกอบหลายชิ้น ซึ่งแต่ละชิ้นอาจจะผลิตมาจากเครื่องจักรที่แตกต่างกัน ด้วยเหตุนี้จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องการให้ส่วนประกอบของผลิตภัณฑ์ทั้งหมดต้องมีความสมบูรณ์แบบที่สุด ในกระบวนการผลิตจึงมีการกำหนดคุณลักษณะของส่วนประกอบแต่ละชิ้น เช่น ความยาว ความแข็ง ฯลฯ แต่ในกระบวนการผลิตอาจเกิดความผันแปรหรือความผิดปกติขึ้นได้ ซึ่งอาจเกิดขึ้นได้ตามธรรมชาติ หรือเกิดขึ้นจากผู้ปฏิบัติงาน และอาจตรวจพบได้หรือตรวจพบไม่ได้ ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงมีการกำหนดระดับความผันแปรที่ยอมรับได้ โดยปกติแล้วความผันแปรดังกล่าวมักถูกกำหนดขึ้นมาตามความต้องการของลูกค้า หรือผู้ออกแบบสินค้า โดยมีกระบวนการควบคุมคุณภาพทางสถิติ (Statistical Process Control; SPC) ซึ่งเป็นเครื่องมือที่นิยมใช้ในการตรวจสอบประสิทธิภาพและความน่าเชื่อถือของกระบวนการจึงทำให้กระบวนการผลิตมีความสม่ำเสมอส่งผลให้ความผันแปรที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตลดลงจนสามารถผลิตสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ได้ตรงตามมาตรฐาน โดยหนึ่งในเครื่องมือของ SPC ที่นิยมใช้ในกระบวนการผลิตทางอุตสาหกรรมคือ แผนภูมิควบคุม (Control Chart) ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการตรวจจับ และควบคุมการผลิต และตรวจจับความผิดปกติเพื่อให้ผลิตภัณฑ์มีคุณภาพสูง แผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของกระบวนการได้แก่ แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum Chart; CUSUM) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Chart; EWMA) [1]

การวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมจะพิจารณาจากค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length; ARL) โดยค่า ARL แบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุมจะพิจารณาจากค่า  $ARL_0$  (in-control ARL) และเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุมจะพิจารณาจากค่า  $ARL_1$  (out-of-control ARL) วิธีการคำนวณหาค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม CUSUM และ

EWMA มีด้วยกันหลายวิธี เช่น วิธีการจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation; MC) เป็นวิธีที่ให้ผลลัพธ์ถูกต้องแต่ใช้เวลามากในการประมวลผล ด้วยเหตุผลนี้จึงมีนักวิจัยหลายท่านนำเสนอวิธีการหาค่าความยาวรันเฉลี่ย ได้แก่ วิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach; MCA) อาทิเช่น Lucas และ Saccucci [2] ใน ค.ศ. 1990 ซึ่งผลลัพธ์จากวิธีดังกล่าวเป็นค่าประมาณและไม่มีคุณสมบัติการลู่เข้า (Convergence) Sukparungsee และ Novikov [3] ใน ค.ศ. 2008 ได้หาสูตรสำเร็จค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยวิธีมาร์ติงเกล (Martingale Approach) และเปรียบเทียบประสิทธิภาพค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA กับแผนภูมิควบคุม CUSUM ผลการวิจัยพบว่า การหาค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธี มาร์ติงเกลเป็นวิธีที่ทันสมัยและใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าวิธี MCA โดยทั่วไป แผนภูมิควบคุม EWMA มักถูกนำมาใช้ในการตรวจจับข้อมูลที่เป็อนอิสระกัน และมีการแจกแจงปกติ แต่ในความเป็นจริงลักษณะของข้อมูลอาจเกิดขึ้นได้หลายรูปแบบซึ่งอาจอยู่ในรูปแบบของอนุกรมเวลา

ตัวแบบอนุกรมเวลามีลักษณะที่หลากหลาย เช่น ตัวแบบการถดถอยในตัว (Auto Regressive; AR) ตัวแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average; MA) ตัวแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ถดถอยในตัว (Autoregressive and Moving Average; ARMA) ฯลฯ โดยทั่วไปตัวแบบอนุกรมเวลาจะมีการแจกแจงแบบปกติ จากการศึกษาของ Suriyakat และคณะ [4] ใน ค.ศ. 2012 ได้นำเสนอวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยใช้วิธีกฎของเกาส์ มาประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลมีตัวแบบ  $AR(1)$  แบบมีแนวโน้มและมี white noise มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง พบว่า วิธีกฎของเกาส์ใช้เวลาในการประมวลผลไม่เกิน 1 นาที ใน ค.ศ. 2015 Petcharat [5] นำเสนอสูตรสำเร็จของความยาวรันเฉลี่ย โดยใช้วิธีสมการปริพันธ์และวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลข สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อค่าสังเกตของกระบวนการมีตัวแบบ AR ที่มีฤดูกาล ( $SAR(P)$ ) และทำการเปรียบเทียบกับแผนภูมิควบคุม CUSUM พบว่า



แผนภูมิควบคุม EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม CUSUM ในปี ค.ศ. 2018 Phanthuna และคณะ [6] ใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขในการวิเคราะห์หาความยาวรันเฉลี่ยบนแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบดัดแปลง สำหรับกระบวนการ  $AR(1)$  พบว่า วิธีดังกล่าวมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย ต่อมาใน ค.ศ. 2020 Sunthornwat และ Areepong [7] ได้เสนอสูตรค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM เมื่อกระบวนการมีตัวแบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่ ทั้งแบบมีฤดูกาล และไม่มีฤดูกาล โดยใช้วิธีสมการปริพันธ์และสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข พร้อมทั้งทำการประยุกต์ใช้กับการตรวจจับลักษณะราคาหุ้นของประเทศไทย ในปี ค.ศ. 2021 Petcharat [8] นำเสนอการหาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยนำเสนอสูตรสำเร็จของความยาวรันเฉลี่ยเมื่อข้อมูลมีตัวแบบ  $MAX(1,r)$  และหาค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยใช้สมการปริพันธ์เชิงตัวเลข 2 วิธี ได้แก่ กฎของเกาส์ และ กฎค่ากลาง ซึ่งพบว่า ทั้ง 3 วิธีให้ค่าความยาวรันเฉลี่ยใกล้เคียงกัน แต่เมื่อพิจารณาเวลาที่ใช้ในการประมวลผลพบว่า สูตรสำเร็จใช้เวลาอย่างน้อยที่สุด รองลงมาคือกฎค่ากลาง ส่วนวิธีของเกาส์ใช้เวลามากที่สุด และ ใน ค.ศ. 2022 Petcharat [9] ได้ศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม ผลรวมสะสมสำหรับตัวแบบการถดถอยในตัวเมื่อมีฤดูกาล ที่มีแนวโน้ม โดยนำเสนอสูตรสำเร็จของความยาวรันเฉลี่ย และหาค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยใช้สมการปริพันธ์เชิงตัวเลข พร้อมกับประยุกต์ใช้กับข้อมูลราคาเงิน

จากที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยสนใจใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขของความยาวรันเฉลี่ยบนแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับกระบวนการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบมีฤดูกาล ที่มีตัวแปรภายนอก  $SMAX(Q,I)L$  โดยใช้วิธีการประมาณเชิงตัวเลข ได้แก่ วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) วิธีกฎของเกาส์ (Gaussian Rule) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule) ซึ่งเกณฑ์ในการประเมินประสิทธิภาพของวิธีประมาณค่าเชิงตัวเลขนั้นจะ เปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ย และเวลาที่ใช้ใน

การประมวลผล (CPU Times) ระหว่างวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข ทั้ง 4 วิธี ในงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม Mathematica ในการประมวลผลเพื่อหาผลลัพธ์จากการใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขประมวลผลด้วย Central Processing Unit (CPU) ระบบปฏิบัติการ Window 10 Home, intel(R) core i7-11370H CPU@3.3GHz-4.8GHz Ram16.0GB(15.7GB)

## 2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

### 2.1. แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก

แบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average; EWMA)

แผนภูมิควบคุม EWMA นำเสนอครั้งแรก โดย Robert ใน ค.ศ. 1959 ซึ่งมีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยขนาดเล็กได้ดี ตัวสถิติ EWMA สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1)

$$X_t = (1 - \lambda)X_{t-1} + \lambda Z_t, t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

เมื่อ  $X_t$  ตัวสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA ณ เวลา  $t$   
 $\lambda$  คือ ค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของข้อมูลในอดีตของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยที่  $0 < \lambda < 1$

$Z_t$  คือ ค่าสังเกตของกระบวนการที่มีตัวแบบ ที่มี White Noise มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2)

$$Z_t = \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} - \dots - \theta_Q \xi_{t-Q} + \beta_1 X \quad (2)$$

เมื่อ  $\xi_t$  มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ( $\xi_t \sim Exp(\alpha)$ )

$\theta_i$  คือ พารามิเตอร์ที่มีค่าระหว่าง  $-1$  ถึง  $1$

$Q$  คือ ลำดับค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่

$L$  คือ คาบเวลาของดัชนีฤดูกาล

$X$  คือ ตัวแปรภายนอก

$\beta_1$  คือ สัมประสิทธิ์ของ  $X$

$\alpha$  คือ ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

กำหนดให้  $\tau$  แทนคาบเวลาที่แผนภูมิส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการออกนอกการควบคุม จะได้ว่า  $\tau_b = \inf\{t > 0: X_k \geq b\}$  เมื่อ  $b$  คือขีดจำกัดบนของแผนภูมิควบคุม EWMA

## 2.2. วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation; NIE)

กำหนดให้สมการปริพันธ์  $L(u) = ARL$  ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อกำหนดให้  $u \in [0, b]$  ดังนั้นสมการปริพันธ์สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3)

$$ARL = L(u) = \mathbb{E}_\infty(\tau_b) \geq T \quad (3)$$

โดยที่  $\tau_b$  แทน คาบเวลาที่แผนภูมิควบคุมส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการออกนอกการควบคุม  $\mathbb{E}_\infty(\tau)$  คือค่าคาดหวังที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงค่าสังเกตที่จุดเปลี่ยนที่เกิดขึ้นที่เวลา  $t$  และ  $T$  คือค่าคงที่ โดยมีสมการปริพันธ์  $L(u)$  ของแผนภูมิควบคุม EWMA ในรูปสมการเชิงปริพันธ์ของ Fredholm ชนิดที่ 2 แสดงได้ดังสมการที่ (4)

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^b L(y) f\left(\frac{y - (1 - \lambda)u}{\lambda}\right) dy \quad (4)$$

โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations Method; NIE) ที่ใช้ในงานวิจัย 4 วิธี ดังนี้

### 2.2.1 กฎค่ากลาง (Midpoint Rule)

กำหนดให้  $y = L(u)$  ในช่วง  $[0, b]$  ทำการแบ่งออกเป็น  $m$  ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง  $h = \frac{b-0}{m}$  จากกฎค่ากลางที่มีการแบ่งช่วงเป็น  $m$  ช่วง สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5)

$$M(L, h) = h \sum_{k=1}^m L\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right) \quad (5)$$

เมื่อ  $k = 0, 1, 2, \dots, m$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ  $L(u)$  ในช่วง  $[0, b]$  อยู่ในรูป  $\int_0^b L(u) du \approx M(L, h)$

สามารถเขียนค่าประมาณสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขจากวิธีกฎค่ากลางของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อมีตัวแปร

ภายนอก โดยสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (6)

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^m w_k j(a_k) f\left(\frac{a_k - (1 - \lambda)u}{\lambda} + \begin{pmatrix} \xi_r - \theta_1 \xi_{r-L} - \theta_2 \xi_{r-2L} \\ \dots - \theta_Q \xi_{r-QL} + \beta_1 X \end{pmatrix}\right) \quad (6)$$

### 2.2.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

กำหนดให้  $y = L(u)$  ในช่วง  $[0, b]$  แบ่งออกเป็น  $m$  ช่วงโดยช่วงมีความกว้าง  $h = \frac{b-0}{m}$  ด้วยกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีการแบ่งช่วงออกเป็น  $m$  ช่วง สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (7)

$$T(L, h) = \frac{h}{2} (L(0) + L(b)) + h \sum_{k=1}^{m-1} L(u_k) \quad (7)$$

เมื่อ  $k = 0, 1, 2, \dots, m$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ  $L(z)$  ในช่วง  $[0, b]$  อยู่ในรูป  $\int_0^b L(u) dx \approx T(L, h)$

สามารถเขียนค่าประมาณสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อมีตัวแปรภายนอก  $SMAX(Q, 1)_L$  ดังสมการที่ (8)

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^m w_k j(a_k) f\left(\frac{a_k - (1 - \lambda)u}{\lambda} + \begin{pmatrix} \xi_r - \theta_1 \xi_{r-L} - \theta_2 \xi_{r-2L} \\ \dots - \theta_Q \xi_{r-QL} + \beta_1 X \end{pmatrix}\right) \quad (8)$$

### 2.2.3 กฎของเกาส์เลอจองด์ ควอดเรเจอร์ (Gauss-Legendre Quadrature Rule)

กฎของเกาส์เลอจองด์ ควอดเรเจอร์ ในงานวิจัยนี้ขอยกคำว่ากฎของเกาส์เลอจองด์ ควอดเรเจอร์ว่ากฎของเกาส์จะนิยามโดยเซตของ  $a_k$  โดย  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq b$  และเซตของค่าน้ำหนัก  $w_k = b/m \geq 0$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$  เป็นค่าคงที่การประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขมีรูปแบบที่แสดงได้ดังสมการที่ (9)



$$\int_0^b W(y)f(y)dy \approx \sum_{k=1}^m w_k f(a_k) \tag{9}$$

โดยที่  $a_k = \frac{b}{m} \left( k - \frac{1}{2} \right)$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$

สามารถเขียนค่าประมาณสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) จากกฎของเกาส์ ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อมีตัวแปรภายนอก  $SMAX(Q,1)_L$  สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (10)

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^m w_k L(a_k) f \left( \frac{a_k - (1-\lambda)u}{\lambda} + \begin{pmatrix} \xi_i - \theta_1 \xi_{i-L} - \theta_2 \xi_{i-2L} - \dots \\ -\theta_0 \xi_{i-Q} + \beta_1 X \end{pmatrix} \right) \tag{10}$$

2.2.4 กฎของซิมป์สัน (Simpson’s Rule)

กฎของซิมป์สัน (Simpson’s Rule) ที่มีการแบ่งช่วงเป็น  $2m$  ช่วงสามารถเขียนได้ในรูปกำหนดให้  $y = L(u)$  ในช่วง  $[0, b]$  แบ่งออกเป็น  $2m$  ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง  $h = \frac{b-0}{2m}$  สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (11)

$$S(L, h) = \frac{h}{3} (L(a) - L(H_u)) + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^m f(y_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^m f(y_{2k-1}); k = 0, 1, 2, \dots, m \tag{11}$$

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ  $L(u)$  ในช่วง  $[0, b]$  อยู่ในรูป  $\int_0^b f(u)du \approx S(L, h)$

สามารถเขียนค่าประมาณสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) กฎของซิมป์สันของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อมีตัวแปรภายนอก สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (12)

$$L(u) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^m w_k L(a_k) f \left( \frac{a_k - (1-\lambda)u}{\lambda} + \begin{pmatrix} \xi_i - \theta_1 \xi_{i-L} - \theta_2 \xi_{i-2L} \\ -\dots - \theta_0 \xi_{i-Q} + \beta_1 X \end{pmatrix} \right) \tag{12}$$

2.3 กำหนดค่าพารามิเตอร์

การกำหนดพารามิเตอร์ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อมีตัวแปรภายนอก  $SMAX(Q,1)_L$  กำหนดให้ขนาดการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์  $\delta$  มีค่าเท่ากับ 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, และ 1.0 ตามลำดับ

3. ผลการทดลอง

งานวิจัยนี้ศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย  $ARL$  สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA โดยวิธี NIE ได้แก่ วิธีกาคกลาง วิธีกาสี่เหลี่ยมคางหมู วิธีกฎของเกาส์ และวิธีกฎของซิมป์สัน เมื่อข้อมูล มีตัวแปร  $SMAX(Q,1)_L$  ที่ White Noise มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณโดยพิจารณา  $ARL$  ที่ประมาณได้จากวิธี NIE ทั้ง 4 วิธี เมื่อกำหนดจุดแบ่ง ( $m$ ) มีค่าเท่ากับ 500 ตามวิธีของ Petcharat [5] พร้อมกันนี้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณทั้ง 4 วิธี โดยใช้เวลาที่ในการประมวลผลในตารางที่ 1 ถึง ตารางที่ 4 กำหนดค่า  $ARL_0$  เท่ากับ 370 กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ของค่าสังเกตที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ( $\alpha_0$ ) มีค่าเท่ากับ 1 และกรณีที่กระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Out-of-Control Process) กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์  $\alpha_1$  มีค่าเท่ากับ  $\alpha_0(1 + \delta)$  และกำหนดระดับการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ( $\delta$ ) มีค่าเป็น 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, และ 1.0 ประมวลผลโดยใช้โปรแกรม Mathematica

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่า  $ARL$  ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแปร  $SMAX(2,1)_{12}$  โดยใช้วิธี NIE เมื่อกำหนด  $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.3, \beta = 1$  และ  $b = 0.0307318$

$\delta$	Midpoint (Time: Second)	Gaussian (Time: Second)	Simpson (Time: Second)	Trapezoidal (Time: Second)
0	370.373 (1.265)	370.373 (6.469)	370.373 (5.187)	370.01 (1.344)
0.1	6.1139 (1.313)	6.1139 (7.438)	6.1139 (5.312)	6.10902 (1.407)

**ตารางที่ 1** เปรียบเทียบค่า *ARL* ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $S_{MAX}(2,1)_{12}$  โดยใช้วิธี NIE เมื่อกำหนด  $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.3, \beta = 1$  และ  $b = 0.0307318$  (ต่อ)

$\delta$	Midpoint (Time: Second)	Gaussian (Time: Second)	Simpson (Time: Second)	Trapezoidal (Time: Second)
0.2	3.61042 (1.281)	3.61042 (6.687)	3.61042 (5.344)	3.60798 (1.391)
0.3	2.76494 (1.265)	2.76494 (6.547)	2.76494 (5.593)	2.76331 (1.39)
0.4	2.33872 (1.281)	2.33872 (6.844)	2.33872 (6.516)	2.33749 (1.406)
0.5	2.08119 (1.391)	2.08119 (6.547)	2.08119 (5.968)	2.08021 (1.406)
0.6	1.9084 (1.391)	1.9084 (6.469)	1.9084 (6.313)	1.90757 (1.468)
0.7	1.78422 (1.594)	1.78422 (6.39)	1.78422 (5.421)	1.78351 (1.437)
0.8	1.69055 (1.391)	1.69055 (6.359)	1.69055 (5.625)	1.68992 (1.422)
0.9	1.6173 (1.625)	1.6173 (6.5)	1.6173 (5.532)	1.61674 (1.469)
1.0	1.55839 (1.453)	1.55839 (6.375)	1.55839 (5.656)	1.55788 (1.453)

**ตารางที่ 2** เปรียบเทียบค่า *ARL* ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $S_{MAX}(3,1)_{12}$  โดยใช้วิธี NIE เมื่อ กำหนด  $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.2, \theta_3 = 0.4, \beta = 1$  และ  $b = 0.0376699$

$\delta$	Midpoint (Time: Second)	Gaussian (Time: Second)	Simpson (Time: Second)	Trapezoidal (Time: Second)
0	370.084 (1.313)	370.084 (6.297)	370.084 (5.484)	369.722 (1.421)
0.1	6.63559 (1.375)	6.63559 (6.36)	6.63559 (5.703)	6.63023 (1.438)
0.2	3.901 (1.359)	3.901 (6.375)	3.901 (5.625)	3.8983 (1.391)
0.3	2.97503 (1.344)	2.97503 (6.391)	2.97503 (5.609)	2.97322 (1.422)
0.4	2.50703 (1.328)	2.50703 (6.421)	2.50703 (5.609)	2.50566 (1.422)

**ตารางที่ 2** เปรียบเทียบค่า *ARL* ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $S_{MAX}(3,1)_{12}$  โดยใช้วิธี NIE เมื่อ กำหนด  $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.2, \theta_3 = 0.4, \beta = 1$  และ  $b = 0.0376699$  (ต่อ)

$\delta$	Midpoint (Time: Second)	Gaussian (Time: Second)	Simpson (Time: Second)	Trapezoidal (Time: Second)
0.5	2.22348 (1.329)	2.22348 (6.375)	2.22348 (5.688)	2.22238 (1.516)
0.6	2.03269 (1.313)	2.03269 (6.328)	2.03269 (5.703)	2.03176 (1.406)
0.7	1.89519 (1.375)	1.89519 (6.344)	1.89519 (5.625)	1.89439 (1.421)
0.8	1.79117 (1.375)	1.79117 (6.375)	1.79117 (5.641)	1.79046 (1.422)
0.9	1.70959 (1.36)	1.70959 (6.375)	1.70959 (5.672)	1.70895 (1.422)
1.0	1.64381 (1.375)	1.64381 (6.469)	1.64381 (5.64)	1.64323 (1.469)

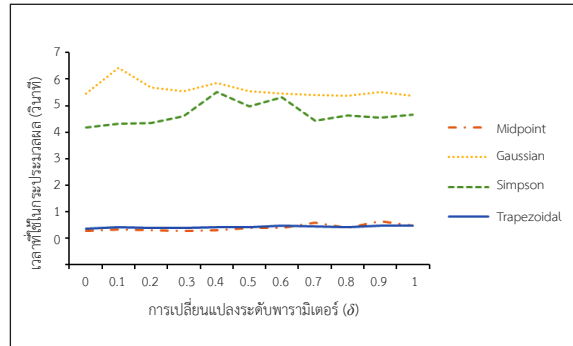
**ตารางที่ 3** เปรียบเทียบค่า *ARL* ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $S_{MAX}(2,1)_4$  โดยใช้วิธี NIE เมื่อ กำหนด  $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.3, \beta = 1$  และ  $b = 0.03767$

$\delta$	Midpoint (Time: Second)	Gaussian (Time: Second)	Simpson (Time: Second)	Trapezoidal (Time: Second)
0	370.581 (1.282)	370.581 (6.297)	370.581 (5.547)	370.218 (1.406)
0.1	6.63571 (1.328)	6.63571 (6.312)	6.63571 (5.532)	6.63036 (1.484)
0.2	3.90104 (1.282)	3.90104 (6.329)	3.90104 (5.563)	3.89834 (1.453)
0.3	2.97505 (1.375)	2.97505 (6.343)	2.97505 (5.547)	2.97324 (1.422)
0.4	2.50704 (1.375)	2.50704 (6.375)	2.50704 (5.562)	2.50567 (1.422)
0.5	2.22349 (1.312)	2.22349 (6.375)	2.22349 (5.812)	2.22239 (1.469)
0.6	2.0327 (1.296)	2.0327 (6.359)	2.0327 (5.656)	2.03177 (1.515)
0.7	1.89519 (1.391)	1.89519 (6.344)	1.89519 (5.625)	1.89439 (1.422)



**ตารางที่ 3** เปรียบเทียบค่า *ARL* ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $SMAX(2,1)_4$  โดยใช้วิธี NIE เมื่อกำหนด  $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.3, \beta = 1$  และ  $b = 0.03767$  (ต่อ)

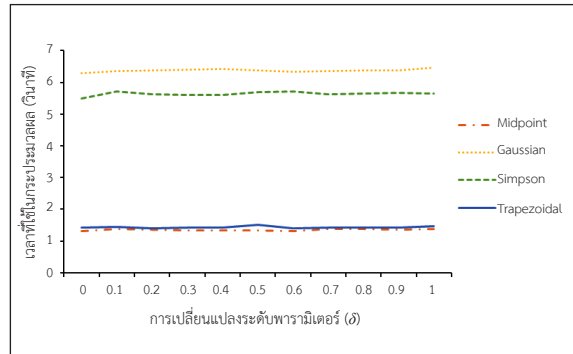
$\delta$	Midpoint (Time: Second)	Gaussian (Time: Second)	Simpson (Time: Second)	Trapezoidal (Time: Second)
0.8	1.79117 (1.406)	1.79117 (6.328)	1.79117 (5.922)	1.79046 (1.422)
0.9	1.70959 (1.375)	1.70959 (6.329)	1.70959 (5.562)	1.70896 (1.422)
1.0	1.64381 (1.391)	1.64381 (6.328)	1.64381 (5.61)	1.64323 (1.484)



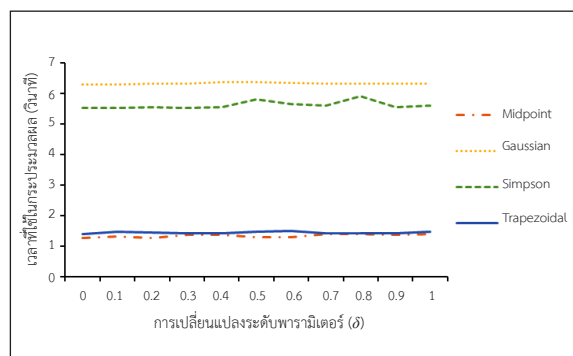
**รูปที่ 1** เวลาในการประมวลผล (CPU Time) ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $SMAX(2,1)_{12}$  โดยใช้วิธี NIE

**ตารางที่ 4** เปรียบเทียบค่า *ARL* ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $SMAX(3,1)_4$  โดยใช้วิธี NIE เมื่อกำหนด  $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.4, \theta_3 = 0.2, \beta = 1$  และ  $b = 0.0417181$

$\delta$	Midpoint (Time: Second)	Gaussian (Time: Second)	Simpson (Time: Second)	Trapezoidal (Time: Second)
0	370.056 (1.312)	370.056 (6.656)	370.056 (5.578)	369.695 (1.421)
0.1	6.9437 (1.36)	6.9437 (6.829)	6.9437 (5.734)	6.93807 (1.469)
0.2	4.07169 (1.343)	4.07169 (7.281)	4.07169 (5.672)	4.06884 (1.453)
0.3	3.09794 (1.344)	3.09794 (7.734)	3.09794 (5.656)	3.09603 (1.422)
0.4	2.60521 (1.359)	2.60521 (7.39)	2.60521 (5.625)	2.60376 (1.422)
0.5	2.30632 (1.36)	2.30632 (6.969)	2.30632 (6.281)	2.30515 (1.468)
0.6	2.10495 (1.312)	2.10495 (7.203)	2.10495 (5.906)	2.10396 (1.438)
0.7	1.95963 (1.656)	1.95963 (7.922)	1.95963 (5.782)	1.95877 (1.421)
0.8	1.84955 (1.359)	1.84955 (6.453)	1.84955 (5.906)	1.84879 (1.454)
0.9	1.76311 (1.344)	1.76311 (6.594)	1.76311 (5.891)	1.76243 (1.422)
1.0	1.69332 (1.36)	1.69332 (6.719)	1.69332 (6.593)	1.6927 (1.437)

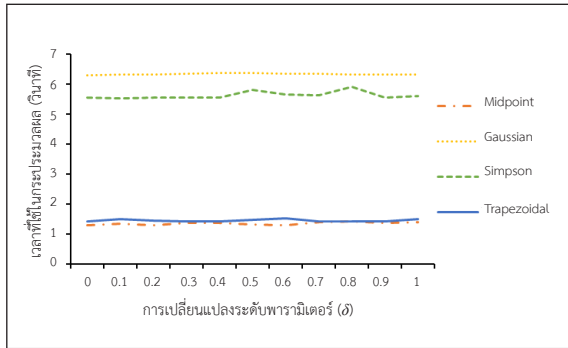


**รูปที่ 2** เวลาในการประมวลผล (CPU Time) ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $SMAX(3,1)_{12}$  โดยใช้วิธี NIE



**รูปที่ 3** เวลาในการประมวลผล (CPU Time) ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $SMAX(2,1)_4$  โดยใช้วิธี NIE





รูปที่ 4 เวลาในการประมวลผล (CPU Time) ของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับตัวแบบ  $SMAX(3,1)_4$  โดยใช้วิธี NIE

#### 4. อภิปรายผลและสรุป

จากตารางที่ 1-2 จะพบว่า วิธีการประมาณ  $ARL$  ทั้ง 4 วิธีที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข สำหรับตัวแบบ  $SMAX(2,1)_{12}$  และ  $SMAX(3,1)_{12}$  พบว่า สามารถประมาณค่า  $ARL$  ได้ใกล้เคียงกันมาก สรุปได้ว่าทั้ง 4 วิธีมีประสิทธิภาพในการประมาณค่า  $ARL$  ใกล้เคียงกันในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ( $\delta$ ) เมื่อ  $m = 500$  และเมื่อพิจารณาจากความเร็วในการประมวลผลพบว่า วิธีกึ่งกลาง และวิธีกึ่งสี่เหลี่ยมคางหมู ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด ถัดมาคือ วิธีกึ่งซิมป์สัน ส่วนวิธีกึ่งของเกาส์ ใช้เวลาในการประมาณผลมากที่สุด แสดงได้ดังรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ตามลำดับ

จากตารางที่ 3-4 จะพบว่า วิธีการประมาณค่า  $ARL$  ทั้ง 4 วิธีที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข สำหรับตัวแบบ  $SMAX(2,1)_4$  และ  $SMAX(3,1)_4$  พบว่า สามารถประมาณค่า  $ARL$  ได้ใกล้เคียงกันมาก สรุปได้ว่าทั้ง 4 วิธี มีประสิทธิภาพในการประมาณค่า  $ARL$  ใกล้เคียงกันในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ( $\delta$ ) เมื่อ  $m = 500$  และเมื่อพิจารณาจากความเร็วในการประมวลผล (CPU Time) พบว่า วิธีกึ่งกลางและวิธีกึ่งสี่เหลี่ยมคางหมูใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด รองลงมา คือวิธีกึ่งซิมป์สัน ส่วนวิธีกึ่งของเกาส์ ใช้เวลาในการประมาณผลมากที่สุด แสดงได้ดังรูปที่ 3 และรูปที่ 4 ตามลำดับ

ในการศึกษาประสิทธิภาพของการประมาณค่า  $ARL$  ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลของกระบวนการประมวลผล (หน่วย: วินาที) ของวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย  $ARL$  ทั้ง 4 วิธีที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข สำหรับตัวแบบ  $SMAX(2,1)_{12}$ ,  $SMAX(3,1)_{12}$ ,  $SMAX(2,1)_4$  และ  $SMAX(3,1)_4$  เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ข้างต้นพบว่า ทั้ง 4 วิธีใช้เวลาในการประมวลผลไม่เกิน 10 วินาที อาจกล่าวได้ว่าวิธีกึ่งกลาง และวิธีกึ่งสี่เหลี่ยมคางหมู ใช้เวลาในการประมวลผลเร็วที่สุด โดยใช้เวลาประมาณ 1-2 วินาที รองลงมาคือวิธีกึ่งของซิมป์สัน โดยใช้เวลาประมาณ 5-7 วินาที และวิธีกึ่งของเกาส์ใช้เวลาในการประมาณผลมากที่สุด โดยใช้เวลาประมาณ 6-8 วินาที

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th ed, Hoboken: Wiley, pp. 400-428, 2009.
- [2] J. M. Lucas and M .S. Saccucci, "Exponentially weighted moving average controls schemes: Properties and enhancements," *Technometrics*, vol. 32, no.1, pp. 1-29, 1990.
- [3] S. Sukparungsee and S. A. A. Novikov, "Analytical approximations for detection of a change-point in case of light-tailed distributions," *Journal of Quality Measurement and Analysis*, vol. 4, no. 2, pp. 49-56, 2008.
- [4] W. Suriyakit, Y. Areepong, S. Sukparungsee, and G. Mititelu, "Analytical method of average run length for trend exponential  $AR(1)$  processes in EWMA procedure," *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, vol. 42, no. 4, pp. 250-253, 2012.
- [5] K. Petcharat, "An analytical solution of  $ARL$  of EWMA procedure for SAR(P)L process with



- exponential white noise,” *Far East Journal of Mathematical Sciences*, vol. 98, no. 1, pp. 8311–843, 2015.
- [6] P. Phanthuna, Y. Areepong, and S. Sukparungsee, “Numerical integral equation methods of average run length on modified ewma control chart for exponential  $AR(1)$  process,” in *Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists*, 2018.
- [7] R. Sunthornwat and Y. Areepong, “Average run length on CUSUM control chart for seasonal and non-seasonal moving average processes with exogenous variables,” *Symmetry*, vol. 12, no. 1, pp. 173, 2020.
- [8] K. Petcharat, “The performance of EWMA control chart for MAX(1,r) process,” Lecture Notes in Engineering and Computer Science: in *Proceedings of The International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2021*, pp 111–115.
- [9]. K. Petcharat, “The effectiveness of CUSUM control chart for trend stationary seasonal autocorrelated data,” *Thailand Statistician*, vol. 20, no. 2, pp. 475–488, 2022 (in Thai).