



การสันธิสระในระนาบและนอกระนาบของท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารีในทะเลลึก

ชัชฌนพงศ์ สุธัมมะ และ การันต์ คล้ายฉ่ำ*

ศูนย์วิจัยวิศวกรรมโครงสร้างพื้นฐานเพื่อความยั่งยืน ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
วิทยาเขตกำแพงแสน

วีรพันธ์ เจียมมีปรีชา

สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 3435 1897 อีเมล: karun.kl@ku.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.04.003

รับเมื่อ 31 มีนาคม 2564 แก้ไขเมื่อ 23 กรกฎาคม 2564 ตอรับเมื่อ 30 กรกฎาคม 2564 เผยแพร่ออนไลน์ 19 เมษายน 2566

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้นำเสนอพฤติกรรมการสันธิสระใน 3 มิติของท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารีในทะเลลึก แบบจำลองสมการแปรผันของท่อได้รับการพัฒนาขึ้นโดยอาศัยหลักการงานและพลังงาน การเสียรูปจากการตัดและการเสียรูปตามแนวแกน ได้รับการพิจารณาสำหรับพลังงานความเครียดเสมือน งานเสมือนเนื่องจากแรงกระทำภายนอกประกอบด้วยงานจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อ การเคลื่อนที่ของไหลภายในท่อ กระแสน้ำทะเล และปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับผิวดินใต้ท้องน้ำ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับกระบวนการทำซ้ำถูกใช้คำนวณหารูปร่างการวางตัวในระนาบของท่อที่สภาวะสมดุลสถิตซึ่งเป็นสภาวะเริ่มต้นสำหรับการวิเคราะห์การสันธิสระใน 3 มิติ สมการครอบคลุมปัญหาสมดุลพลศาสตร์ในรูปของเมทริกซ์ถูกจัดรูปสำหรับปัญหาค่าเจาะจงในการคำนวณหาความถี่ธรรมชาติและโหมดการสันของท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารี โดยการศึกษาได้มุ่งเน้นที่จะจำแนกค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับการสันธิสระในระนาบและนอกระนาบ และโหมดการสันของท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารี ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าผลกระทบจากสติเฟเนส เนื่องจากรูปร่างเชิงเรขาคณิตทำให้เกิดการสันนอกระนาบก่อนการสันในระนาบ แอมพลิจูดสูงสุดของการสันเกิดขึ้นที่ตำแหน่งใกล้กับท้องน้ำและจำนวนจุดตัดกลับบนเส้นโค้งการสันจะเพิ่มขึ้นตามลำดับโหมดของการสัน

คำสำคัญ: การสันธิสระใน 3 มิติ ความถี่ธรรมชาติ ท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารี วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โหมดการสัน

การอ้างอิงบทความ: ชัชฌนพงศ์ สุธัมมะ, การันต์ คล้ายฉ่ำ และ วีรพันธ์ เจียมมีปรีชา, “การสันธิสระในระนาบและนอกระนาบของท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารีในทะเลลึก,” *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 33, ฉบับที่ 3, หน้า 1–13, เลขที่บทความ 233-054893, ก.ค.-ก.ย. 2566.



In-plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Deepwater Catenary Riser

Chisanuphong Suthumma and Karun Klaycham*

Research Center for Sustainable Infrastructure Engineering (RSIE), Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering at Kamphaeng Saen, Kasetsart University, Kamphaeng Saen Campus, Nakhon Pathom, Thailand

Weeraphan Jiammeepreecha

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan, Nakhon Ratchasima, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0 3435 1897, E-mail: karun.kl@ku.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.04.003

Received 31 March 2021; Revised 23 July 2021; Accepted 30 July 2021; Published online: 19 April 2023

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

This paper presents three-dimensional free vibration behavior of a catenary riser in deep water. The work-energy principle can be developed by the variational model formulation of the riser. The bending and axial deformation were considered as virtual strain energy. The external virtual work done consists of the work originated by effective riser weight, internal fluid motion, ocean current, and force caused by riser-soil interaction. The nonlinear finite element method with iterative procedure is utilized to calculate the in-plane static equilibrium configuration, which is used further as the initial state for three-dimensional free vibration analysis. The governing dynamic equilibrium equation written in matrix form is rearranged as the eigenvalue problem, which is used to calculate the natural frequencies and their corresponding mode shapes of the catenary risers. This study focuses on identifying both in-plane and out-of-plane natural frequencies of free vibration as well as their corresponding mode shapes of the catenary marine riser. The numerical results show that the effect of geometric stiffness causes the riser to vibrate in in-plane direction before out-of-plane direction. The maximum amplitude of vibration is located near the seabed and the number of inflection points on the vibration curve increases according to the increasing order of vibration mode.

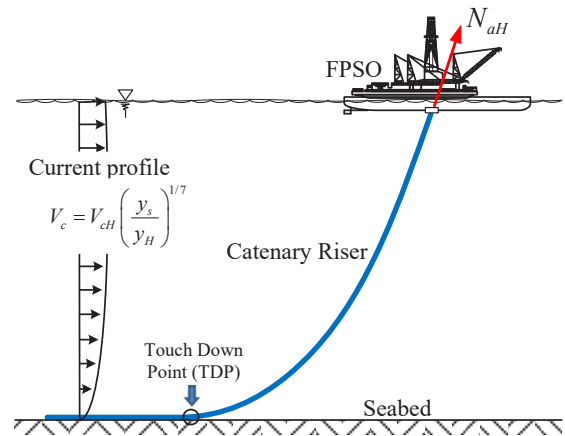
Keywords: Catenary Riser, Finite Element Method, Three-Dimensional Free Vibration, Modal Vibration, Natural Frequency

Please cite this article as: C. Suthumma, K. Klaycham, and W. Jiammeepreecha, "In-plane and out-of-plane free vibrations of deepwater catenary riser," *The Journal of KMUTNB*, vol. 33, no. 3, pp. 1–13, ID. 233-054893, Jul.-Sep. 2023 (in Thai).

1. บทนำ

อุตสาหกรรมการผลิตและขุดเจาะปิโตรเลียมนอกชายฝั่งขยายกำลังการผลิตไปยังพื้นที่ทะเลที่มีความลึกมากขึ้น การขนถ่ายปิโตรเลียมเหลวจำเป็นต้องใช้ท่อลำเลียงของไหลจากหลุมเจาะใต้ท้องทะเลไปยังแท่นผลิตที่ผิวน้ำ โดยระบบท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลที่มีการวางตัวแบบรูปทรงคาร์ทีนารี (Steel Catenary Riser) ดังรูปที่ 1 เป็นระบบทางเลือกหนึ่งที่มีประสิทธิภาพมากเนื่องจากสามารถต้านทานแรงดันน้ำได้สูง [1] และมีค่าใช้จ่ายถูกเมื่อเทียบกับระบบท่อแบบอื่น [2] ใน ค.ศ. 1994 ระบบท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารีได้รับการพัฒนามาใช้ครั้งแรกสำหรับขุดเจาะน้ำมัน โดยบริษัทเชลล์ในอ่าวเม็กซิโกที่ระดับความลึก 872 เมตร [3] ต่อมาได้รับการพัฒนาและใช้ที่ระดับความลึก 910 เมตรโดยบริษัท Petrobras ซึ่งเป็นบริษัทรัฐวิสาหกิจผู้ผลิตและขุดเจาะน้ำมันขนาดใหญ่ของประเทศบราซิล [4]

ปัญหาการวิบัติของท่อลำเลียงของไหลส่วนใหญ่เกิดจากผลของความล้าถือเป็นปัญหาเชิงลึกที่มีความซับซ้อนในเชิงวิศวกรรม [5], [6] การวิเคราะห์ปัญหานี้สามารถทำได้โดยการวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นของท่อภายใต้แรงพลศาสตร์ เช่น งานวิจัยของ Chen และคณะ [7] อย่างไรก็ตาม Athisakul และคณะ [8], [9] ได้วิเคราะห์หาแรงดึงวิกฤตหรือแรงดึงต่ำสุดที่ยังคงรักษาสภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ของท่อได้อย่างไรก็ตามในกรณีที่ท่อลำเลียงของไหลที่มีความยาวมาก ๆ จนกระทั่งท่อสามารถแอ่นตัวเป็นรูปทรงแบบคาร์ทีนารี ชิ้นส่วนด้านล่างของท่อจะวางราบไปกับผิวดินใต้ท้องทะเล (Seabed) ดังรูปที่ 1 โดยปกติท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารีจะประกอบด้วย 2 ส่วน ได้แก่ ส่วนล่างที่วางพาดกับผิวดินใต้ท้องทะเล และส่วนบนที่ไม่ได้สัมผัสกับผิวดินใต้ท้องทะเล ซึ่งแขวนอิสระไปยังแท่นผลิตที่ผิวน้ำ [10] ตำแหน่งของท่อที่เริ่มสัมผัสกับผิวดินใต้ท้องทะเล (Touch Down Point; TDP) หรือจุด TDP ซึ่งเป็นตำแหน่งที่วิกฤตมากที่สุดที่ต้องได้รับการวิเคราะห์และออกแบบอย่างระมัดระวัง เนื่องจากจุด TDP จะเกิดโมเมนต์ดัดอย่างมหาศาล ดังนั้นการหาตำแหน่งสมดุลสถิตยศาสตร์ของท่อและจุด TDP จำเป็นต้องวิเคราะห์ปัญหาแบบไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อพิจารณาการแอ่นตัวมากของท่อและ



รูปที่ 1 ท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารี

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อและผิวดินใต้ท้องน้ำ ซึ่งโดยทั่วไปใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ วิธีอิงเป้า และวิธีเชิงวิเคราะห์ [8]–[12] เป็นต้น

Chatjigeorgiou [10] นำเสนอแบบจำลองไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของท่อแบบคาร์ทีนารีในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งโดยอาศัยหลักการสมดุลของแรงและโมเมนต์ Li และ Chau [13] ได้จำลองท่อลำเลียงของไหลโดยแบ่งท่อออกเป็น 3 ชั้นส่วนหลัก และใช้ทฤษฎีเส้นโค้งคาร์ทีนารีในการหาตำแหน่งสมดุลของท่อ อย่างไรก็ตามผลของค่าความแข็งแรงแ็งเนื่องจากการดัด (Bending Stiffness) แรงกระแส น้ำซึ่งแรงจากของไหลภายในท่อไม่สามารถนำมาพิจารณาในสมการคาร์ทีนารีดังกล่าวได้ Klaycham และคณะ [14] นำเสนอแบบจำลองสมการแปรผันของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลสำหรับวิเคราะห์ชิ้นส่วนท่อตั้งแต่จุด TDP ไปยังแท่นผลิตที่ผิวน้ำ แบบจำลองดังกล่าวจึงไม่ได้พิจารณาผลกระทบจากปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับผิวดินใต้ท้องน้ำ (Riser-Soil Interaction) อย่างไรก็ตาม เพื่อพิจารณาความต่อเนื่องด้านสถิติเนสของท่อที่บริเวณจุด TDP จึงจำลองจุด TDP ของท่อเป็นแบบสปริงด้านการหมุน (Rotational Spring) ซึ่งสามารถให้ผลการวิเคราะห์ที่แม่นยำหรือสอดคล้องกับปัญหาจริงของท่อแบบคาร์ทีนารี ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับข้อกำหนดค่าสถิติเนสของสปริงที่จุด TDP งานวิจัยดังกล่าวแนะนำเสนอค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นของท่อแต่จำกัดปัญหาใน 2 มิติเท่านั้น



หลังจากวิเคราะห์หาตำแหน่งสมดุลสถิตยศาสตร์ของท่อแล้ว การวิเคราะห์การสั่นอิสระของท่อเป็นสิ่งจำเป็นในลำดับถัดไป เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นอิสระ พฤติกรรมการสั่นอิสระดังกล่าวจะช่วยให้เราเข้าใจพฤติกรรมการสั่นแบบบังคับเนื่องจากแรงพลศาสตร์และความสอดคล้องกับผลตอบสนองเชิงโหมดของท่อ [15]

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อหาสมดุลสถิตยศาสตร์และค่าความถี่ธรรมชาติของท่อแบบคาร์ทีนารีเมื่อพิจารณาปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อและท้องน้ำ โดยแรงปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อและท้องน้ำได้พิจารณาเป็นงานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอกกระทำ ตำแหน่งสมดุลสถิตยศาสตร์ของท่อในระนาบ 2 มิติ ได้จากการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากโดยอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Process) โดยการวิเคราะห์การสั่นอิสระในระนาบและนอกระนาบของท่อได้จากการแก้ปัญหาค่าเจาะจง (Eigenvalue) ของสมการการเคลื่อนที่ของท่อ

2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

รูปที่ 1 แสดงการวางตัวของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบคาร์ทีนารี ปลายล่างของท่ออยู่ที่จุดกำเนิดโดยจำลองให้วางอยู่บนจุดรองรับแบบยึดหมุน (Pinned Support) และมีส่วนที่วางพาดไปกับท้องน้ำ ขณะที่ปลายบนของท่ออยู่ที่พิกัดตำแหน่ง x_H, y_H เมื่อ x_H คือ ระยะที่วัดในแนวราบจากปลายล่างของท่อไปถึงปลายบนของท่อ (Horizontal Offset) และ y_H คือ ระดับความลึกของน้ำทะเล หรือระยะที่วัดในแนวตั้งจากปลายล่างของท่อไปถึงปลายบนของท่อ ที่ตำแหน่งปลายบนของท่อจะมีการให้แรงดึง (N_{aH}) เพื่อให้ท่อคงสภาพอยู่ในสภาวะสมดุล ในการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบคาร์ทีนารี จะพัฒนาขึ้นโดยอาศัยหลักการของงาน-พลังงานเสมือน โดยพิจารณาพลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการตัดและการเสียรูปตามแนวแกน และงานเสมือนเนื่องจากแรงกระทำภายนอกได้แก่ แรงจากการขนถ่ายของไหล แรงจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อ แรงลากจากกระแส น้ำ และแรงจากปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับผิวดินใต้ท้องน้ำดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 พลังงานความเครียดเสมือน

พลังงานความเครียดเนื่องจากการตัดและการยึดหดตัวตามแนวแกนสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1)

$$\delta U = \int_0^{s_s} \left\{ (N_{as} - B_s \kappa_s^2) x'_s \delta u'_s + B \kappa_s y'_s \delta u'_s + (N_{as} - B \kappa_s^2) y'_s \delta v'_s - B \kappa_s x'_s \delta v'_s \right\} ds_s \quad (1)$$

กำหนดให้ ($'$) คือ อนุพันธ์เทียบกับความยาวส่วนโค้งของท่อ (s_s) ตัวห้อย s แสดงถึงพารามิเตอร์ต่างๆ ณ สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ s_s คือ ความยาวทั้งหมดของท่อ (x_s, y_s) คือ พิกัดในแนวราบและแนวตั้งของท่อ ตามลำดับ (u_s, v_s) คือ ค่าการเคลื่อนที่ทางสถิตยศาสตร์ของท่อในแนวราบและแนวตั้ง ตามลำดับ ในที่นี้ตัวแปร $B = EI_p$ คือ ความแข็งแรงแรงด้านการตัด ตัวแปร $\kappa_s = x''_s y'_s - x'_s y''_s$ คือ ค่าความโค้งของท่อ และ N_{as} คือ แรงดึงตามแนวแกนที่ตำแหน่งต่างๆ ของท่อซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (2)

$$N_{as} = N_{aH} + \int_{s_s}^s [Q\theta' - w_a \cos \theta + f_{Hr}] ds_s \quad (2)$$

เมื่อ N_{aH} และ Q คือ แรงดึงที่ปลายด้านบนของท่อ และแรงเฉือน ตามลำดับ θ คือ มุมระหว่างแนวราบกับเส้นโค้งการเสียรูปของท่อ และ w_a คือ น้ำหนักสุทธิของท่อซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (3)

$$w_a = [\rho_p A_p - \rho_e A_e + \rho_l A_l] g \quad (3)$$

เมื่อ g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (ρ_p, ρ_e, ρ_l) คือ ความหนาแน่นของวัสดุท่อ น้ำทะเลและของไหลภายในท่อ ตามลำดับ (A_p, A_e, A_l) คือ พื้นที่หน้าตัดท่อ พื้นที่หน้าตัดภายในและพื้นที่หน้าตัดภายนอกของท่อ ตามลำดับ

2.2 งานเสมือนเนื่องแรงภายนอก

งานเสมือนเนื่องแรงกระทำภายนอกประกอบด้วย น้ำหนักสุทธิของท่อ การขนถ่ายของไหลภายในท่อ แรงลากจากกระแส น้ำ และแรงจากปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับผิวดิน

ใต้ท้องน้ำ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4)

$$\delta W = \int_0^{s_i} \left\{ (f_{Hn} y'_s + f_{Ht} x'_s - m_i \kappa_s y'_s V_i^2) \delta u_s + (-w_a - f_{Hn} x'_s + f_{Ht} y'_s + m_i \kappa_s x'_s V_i^2 + f_s) \delta v_s \right\} ds_s \quad (4)$$

เมื่อตัวแปร m_i และ V_i คือ ค่ามวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของท่อและความเร็วของของไหลภายในท่อ ตามลำดับ ตัวแปร (f_{Hn}, f_{Ht}) คือ แรงกระทำเนื่องจากกระแสในทิศทางตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับแกนท่อ ตามลำดับ ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยอาศัยหลักการของมอร์ริสัน (Morison's Equation) [16] ดังสมการที่ (5)

$$f_{Hn} = \frac{1}{2} \rho_e D_e C_{Dn} V_c y'_s |V_c y'_s|$$

$$f_{Ht} = \frac{1}{2} \rho_e \pi D_e C_{Dt} V_c x'_s |V_c x'_s| \quad (5)$$

เมื่อ D_e และ V_c คือ ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกของท่อและความเร็วของกระแสน้ำ ตามลำดับ (C_{Dn}, C_{Dt}) คือ สัมประสิทธิ์แรงลากในทิศทางตั้งฉากและแนวสัมผัสกับแกนท่อตามลำดับ ในที่นี้ความเร็วของกระแสน้ำจะมีค่าเท่ากับ $V_c = V_{ch} (y_s/y_H)^{1/7}$ เมื่อ V_{ch} คือ ความเร็วกระแสน้ำที่ผิวหน้า และ $f_s = k_s |y_s|$ คือ แรงปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับผิวดินใต้ท้องน้ำ เมื่อ k_s คือ สติฟเนสของดินใต้ท้องน้ำ ในที่นี้ $f_s = 0$ ถ้า $y_s < 0$

2.3 งาน-พลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบ

จากหลักการของงานเสมือน งานและพลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบท่อสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (6)

$$\delta \pi_s = \delta U - \delta W \quad (6)$$

แทนสมการที่ (1) และ (4) ลงในสมการที่ (6) ทำให้สามารถเขียนสมการของงาน-พลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบท่อได้ดังสมการที่ (7)

$$\delta \pi_s = \int_0^{s_i} \left\{ (N_{as} - B \kappa_s^2) x'_s \delta u'_s + B \kappa_s y'_s \delta u''_s + (N_{as} - B \kappa_s^2) y'_s \delta v'_s - B \kappa_s x'_s \delta v''_s + (-f_{Hn} y'_s - f_{Ht} x'_s + m_i \kappa_s y'_s V_i^2) \delta u_s + (w_a + f_{Hn} x'_s - f_{Ht} y'_s - m_i \kappa_s x'_s V_i^2 - f_s) \delta v_s \right\} ds_s \quad (7)$$

สมการที่ (7) เป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นไม่สามารถหาผลเฉลยแบบแม่นยำตรงได้ ดังนั้นในการศึกษานี้จึงใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข

2.4 การวิเคราะห์หาค่าสมมูลสถิตยศาสตร์ของท่อ

ในการศึกษานี้จะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลขของปัญหาสมมูลสถิตยศาสตร์ของท่อ โดยทำการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตามความยาวส่วนโค้งของท่อ (s_s) ซึ่งท่อแต่ละชิ้นส่วนจะมีความยาวเท่ากันคือ $l = s_s / nelem$ โดยที่ $nelem$ คือ จำนวนชิ้นส่วนย่อยทั้งหมดของท่อ ดังนั้นสามารถคำนวณหาพิกัดในระนาบ 2 มิติตามทิศทางในแนวราบและทิศทางในแนวตั้งของท่อ (x_s, y_s) ได้จากสมการที่ (8)

$$x_s = x_o + u_s, \quad y_s = y_o + v_s \quad (8)$$

เมื่อ (x_o, y_o) คือ พิกัดตามแนวราบและแนวตั้งของท่อที่สภาวะก่อนการเสียรูป ตามลำดับ จากหลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะสามารถประมาณค่าการเคลื่อนที่ตามแนวราบและแนวตั้งของท่อ (u_s, v_s) ได้ด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ห้า ดังสมการที่ (9)

$$\{\mathbf{Q}_s\} = \{u_s \quad v_s\}^T = [\mathbf{N}] \{\mathbf{q}_s\} \quad (9)$$

เมื่อ $[\mathbf{N}]$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันรูปร่าง ซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ 5 (N_{5i}) [17] ดังสมการที่ (10)



$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_{51} & N_{52} & N_{53} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{51} & N_{52} & N_{53} \\ & N_{54} & N_{55} & N_{56} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & N_{54} & N_{55} & N_{56} \end{bmatrix} \quad (10)$$

สำหรับเวกเตอร์ $\{\mathbf{q}_s\}$ คือ ดีกรีอิสระที่จุดต่อของชิ้นส่วนย่อยของท่อ จะมีค่าดังสมการที่ (11)

$$\{\mathbf{q}_s\} = \{u_{1s} \quad u'_{1s} \quad u''_{1s} \quad v_{1s} \quad v'_{1s} \quad v''_{1s} \quad u_{2s} \quad u'_{2s} \quad u''_{2s} \quad v_{2s} \quad v'_{2s} \quad v''_{2s}\}^T \quad (11)$$

จากหลักการของงาน-พลังงานเสมือน สมการที่ (7) จะเท่ากับศูนย์เมื่อระบบของท่ออยู่ในสถานะสมดุล ดังนั้นสมการโพเินต์เอลิเมนต์ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยของท่อสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (12)

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial \mathbf{q}_s} = \int_0^l \left[[\mathbf{N}'^T \left\{ \begin{matrix} (N_{as} - B\kappa_s^2)x'_s \\ (N_{as} - B\kappa_s^2)y'_s \end{matrix} \right\} + [\mathbf{N}''^T \left\{ \begin{matrix} B\kappa_s y'_s \\ -B\kappa_s x'_s \end{matrix} \right\} \right] ds_s + \int_0^l \left[[\mathbf{N}]^T \left\{ \begin{matrix} -f_{Hs} y'_s - f_{Hs} x'_s + m_s \kappa_s V_i^2 \\ w_a + f_{Hs} x'_s - f_{Hs} y'_s - m_s \kappa_s V_i^2 - f_s \end{matrix} \right\} \right] ds_s = \{\mathbf{0}\} \quad (12)$$

โดยที่ปลายล่างของท่อซึ่งรองรับด้วยจตุรรองรับแบบยึดหมุน (Pinned Support) จะมีเงื่อนไขขอบเขตดังสมการที่ (13)

$$u_s = 0, u''_s = 0, v_s = 0, v''_s = 0 \quad (13)$$

จตุรรองรับที่ปลายบนของท่อจะเป็นจตุรรองรับที่ยอมให้ท่อสามารถเลื่อนไถลได้ (Slip Support) ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดได้ดังสมการที่ (14)

$$u_s = -u_{sH}, u''_s = 0, v_s = -v_{sH}, v''_s = 0 \quad (14)$$

หลังจากที่รวมระบบสมการของชิ้นส่วนย่อยของท่อในสมการที่ (12) และกำหนดเงื่อนไขของจตุรรองรับตาม

สมการที่ (13) และ (14) แล้วจะได้ระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจะต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ (Iterative Procedure) ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข

2.5 การวิเคราะห์การสั่นอิสระ

เมื่อมีแรงกระทำพลศาสตร์ทำให้ท่อเคลื่อนที่จากสถานะสมดุลสถิตยศาสตร์ในระนาบ $(x_s - y_s)$ ไปยังตำแหน่งสมดุลพลศาสตร์ที่พิกัด (x, y, z) เมื่อ $x = x_s + u_d$ และ $y = y_s + v_d$ คือ ตำแหน่งในระนาบของท่อตามพิกัดในแนวราบ และแนวตั้ง ตามลำดับ และ $z = w_d$ คือ พิกัดนอกระนาบของท่อ โดยอาศัยหลักการของวิธีโพเินต์เอลิเมนต์ ค่าการเคลื่อนที่พลศาสตร์ของชิ้นส่วนย่อยของท่อ (u_d, v_d, w_d) สามารถประมาณได้ดังสมการที่ (15)

$$\{\mathbf{u}_d\} = \{u_d \quad v_d \quad w_d\}^T = [\mathbf{N}_d] \{\mathbf{d}_d(t)\} \quad (15)$$

เมื่อ $[\mathbf{N}_d]$ คือ เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่าง และ $\{\mathbf{d}_d\}$ คือ เวกเตอร์ดีกรีอิสระของชิ้นส่วนย่อยหรือค่าการเคลื่อนที่ที่จุดต่อของท่อ ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (16)

$$[\mathbf{N}_d] = \begin{bmatrix} N_{51} & N_{52} & N_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{51} & N_{52} & N_{53} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{51} & N_{52} & N_{53} \\ N_{54} & N_{55} & N_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{54} & N_{55} & N_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{54} & N_{55} & N_{56} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{d}_d\} = \{u_{1d} \quad u'_{1d} \quad u''_{1d} \quad v_{1d} \quad v'_{1d} \quad v''_{1d} \quad w_{1d} \quad w'_{1d} \quad w''_{1d} \quad u_{2d} \quad u'_{2d} \quad u''_{2d} \quad v_{2d} \quad v'_{2d} \quad v''_{2d} \quad w_{2d} \quad w'_{2d} \quad w''_{2d}\}^T \quad (16)$$

จากหลักการวิธีโพเินต์เอลิเมนต์สามารถจัดรูปแบบสมการการสั่นอิสระของท่อลำเลียงของไหล [17] ได้ดังสมการที่ (17)

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}_d\} + [\mathbf{G}]\{\dot{\mathbf{D}}_d\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}_d\} = \{\mathbf{0}\} \quad (17)$$

เมื่อ $\{\mathbf{D}_d\} = \sum_{i=1}^{nelem} \{\mathbf{d}_d\}$, $\{\dot{\mathbf{D}}_d\} = \sum_{i=1}^{nelem} \{\dot{\mathbf{d}}_d\}$ และ $\{\ddot{\mathbf{D}}_d\} = \sum_{i=1}^{nelem} \{\ddot{\mathbf{d}}_d\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ ความเร็ว และความเร่งของท่อน ตามลำดับ $[\mathbf{M}] = \sum_{i=1}^{nelem} [\mathbf{m}^e]$ คือ เมตริกซ์มวลรวมของระบบท่อนลำเลียงของไหล $[\mathbf{m}^e]$ คือ เมตริกซ์มวลของชิ้นส่วนย่อยของท่อน ซึ่งคำนวณได้ดังสมการที่ (18)

$$[\mathbf{m}^e] = \int_0^l \left\{ [\mathbf{N}_d]^T \begin{bmatrix} m_p + m_i + C_a^* & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{N}_d] \right\} ds \quad (18)$$

เมื่อ m_p และ m_i คือ มวลต่อหนึ่งความยาวของท่อนและของไหลภายในท่อน ตามลำดับ $C_a^* = C_a \rho_e A_e$ คือ มวลส่วนเพิ่มเนื่องจากการสิ้นในน้ำของท่อน โดยที่ C_a คือ สัมประสิทธิ์ของมวลส่วนเพิ่ม $[\mathbf{G}] = \sum_{i=1}^{nelem} [\mathbf{g}^e]$ คือ เมตริกซ์ความหน่วงรวมของระบบ ทั้งนี้ $[\mathbf{g}^e]$ คือ เมตริกซ์ความหน่วงของชิ้นส่วนย่อยดังสมการที่ (19)

$$[\mathbf{g}^e] = \int_0^l \left\{ [\mathbf{N}_d]^T \begin{bmatrix} 2 - x_s'^2 & -x_s' y_s' & 0 \\ -x_s' y_s' & 2 - y_s'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [\mathbf{N}'_d] \right\} ds \quad (19)$$

$[\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^{nelem} [\mathbf{k}^e]$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์รวมของระบบท่อน เมื่อ $[\mathbf{k}^e]$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนย่อยของท่อน ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (20)

$$[\mathbf{k}^e] = [\mathbf{k}_a] + [\mathbf{k}_{b1}] + [\mathbf{k}_{b2}] + [\mathbf{k}_s] \quad (20)$$

สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนย่อยของท่อนประกอบด้วย สติฟเนสด้านการเสีรูปร่างตามแนวแกน สติฟเนสด้านการคดและด้านการเคลื่อนที่เนื่องปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อนและท่อน้ำ ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (21)

$$[\mathbf{k}_a] = \int_0^l \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbf{N}'_d]^T (N_{as} - m_i V_i^2) & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{N}'_d] + [\mathbf{N}'_d]^T EA_p \begin{bmatrix} x_s'^2 & x_s' y_s' & 0 \\ x_s' y_s' & y_s'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{N}'_d] \right\} ds$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}_{b1}] &= \int_0^l \left\{ [\mathbf{N}'_d]^T B \begin{bmatrix} y_s'^2 & -x_s' y_s' & 0 \\ -x_s' y_s' & x_s'^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_s'^2 + y_s'^2 \end{bmatrix} [\mathbf{N}'_d] \right\} ds_s \\ [\mathbf{k}_{b2}] &= \int_0^l \left\{ [\mathbf{N}'_d]^T B \kappa_s \begin{bmatrix} 2x_s' y_s' & y_s'^2 - x_s'^2 & 0 \\ y_s'^2 - x_s'^2 & -2x_s' y_s' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{N}'_d] \right\} ds_s \\ [\mathbf{k}_s] &= \int_0^l \left\{ [\mathbf{N}_d]^T \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_s \end{bmatrix} [\mathbf{N}_d] \right\} ds_s \end{aligned} \quad (21)$$

หลังจากรวมเมตริกซ์ของทุกเอลิเมนต์เข้าด้วยกันตามสมการที่ (17) จากนั้นจะทำการกำหนดเงื่อนไขของจตุรรองรับของท่อน เมื่อจตุรรองรับที่ปลายบน ($s_s = s_s$) และปลายล่าง ($s_s = 0$) ของท่อนเป็นแบบยึดหมุน ดังนั้นค่าเงื่อนไขขอบเขตคือ $u_d = 0, u_d'' = 0, v_d = 0, v_d'' = 0, w_d = 0$ และ $w_d'' = 0$ สำหรับการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของท่อนลำเลียงของไหลและรูปแบบการสั่นอิสระ จำเป็นต้องจัดสมการที่ (17) ให้อยู่ในรูปแบบของปัญหาเจาะจง (Eigenvalue Problem) ในการศึกษาได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน 90 (Fortran 90) สำหรับช่วยในกระบวนการคำนวณตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [14]

3. ผลการคำนวณเชิงตัวเลขและอภิปรายผล

หัวข้อนี้นำเสนอการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของท่อนลำเลียงของไหลได้ทะเลที่ได้รับการพัฒนาขึ้น และพฤติกรรมการสั่นอิสระในระนาบและการสั่นนอกระนาบของท่อนได้ทะเลที่มีรูปร่างการวางตัวแบบคาร์ทีนารี

3.1 การตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข

เพื่อให้มั่นใจว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อนลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารีที่พัฒนาขึ้นในการศึกษานี้รวมทั้งกระบวนการคำนวณเชิงตัวเลขตามวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความถูกต้องแม่นยำ จำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข ด้วยเหตุนี้ผลคำตอบที่ได้จากการศึกษานี้ได้นำไปเปรียบเทียบกับผลการทดสอบในห้องปฏิบัติการสำหรับ



วิเคราะห์การสั่นอิสระของท่อแบบคาร์ทีนารีจากงานวิจัยของ Pesce และคณะ [18] โดยคุณสมบัติของท่อและพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้ในการตรวจสอบนี้ได้แสดงไว้ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์ต่างๆ ของท่อ

ตัวแปร	ปริมาณ
เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกท่อ, D_o (m)	0.0222
ความแข็งต้านการดัดของท่อ, B (N-m ²)	0.056
ความแข็งต้านการยึดหดตัวตามแนวแกนของท่อ, EA_p (N)	1,200
ความหนาแน่นของท่อ, ρ_p (kg/m ³)	1,886
มวลต่อความยาวของท่อ, m (kg/m)	1.19
ความยาวท่อ, s (m)	6.65
ความลึกทะเล, y_H (m)	2.50
ระยะในแนวราบระหว่างปลายบนและปลายล่างของท่อ, x_H (m)	5.2
สติฟเนสของดินใต้ทะเล, k_s (N/m)	15,000
สัมประสิทธิ์ของมวลส่วนเพิ่ม, C_a	1.00

ผลการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดการสั่น 5 โหมดแรกได้แสดงในตารางที่ 2 ซึ่งพบว่า ผลค่าตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากการศึกษาทำให้ผลที่ใกล้เคียงกับผลการทดสอบของแบบจำลองทางกายภาพในห้องปฏิบัติการ โดยค่าร้อยละความแตกต่างมากที่สุดคือ 7.39 จากการเปรียบเทียบการสั่นของโหมดที่ 4 ซึ่งเป็นการสั่นในระนาบ (IP) ของท่อ ค่าความผิดพลาดนี้ถือว่าอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้และมั่นใจว่าแบบจำลองของท่อจากการศึกษานี้มีความถูกต้องแม่นยำและสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการสั่นของท่อในสภาพแวดล้อมอื่นได้

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติของท่อ

โหมด	ความถี่ธรรมชาติ, ω (rad/s)		% ต่างต่าง
	Pesce และคณะ [18]	งานวิจัยนี้	
1 (OP)	2.7018	2.6704	1.16
2 (IP)	4.5239	4.4686	1.22
3 (OP)	5.4664	5.3080	2.90
4 (IP)	7.2257	6.6916	7.39
5 (OP)	7.9168	7.9866	-0.88

* หมายเหตุ OP = การสั่นนอกระนาบ ; IP = การสั่นในระนาบ

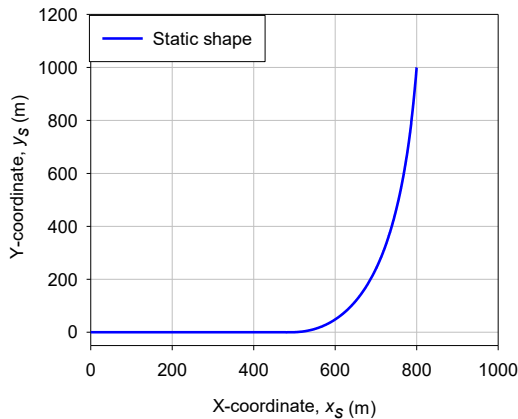
3.2 พฤติกรรมการสั่นอิสระของท่อ

หัวข้อนี้นำเสนอพฤติกรรมการสั่นอิสระของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบคาร์ทีนารี คุณสมบัติของท่อและพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ที่แสดงไว้ในตารางที่ 3 โดยท่อมีความยาวเท่ากับ 1,600 เมตร และติดตั้งในทะเลที่มีความลึก 1,000 เมตร

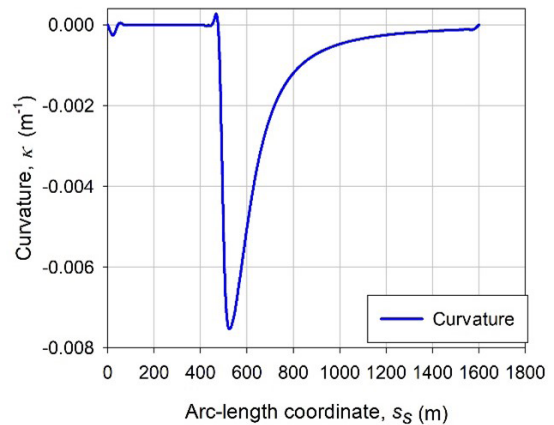
ตารางที่ 3 พารามิเตอร์ต่างๆ ของท่อ

ตัวแปร	ปริมาณ
เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกท่อ, D_o (m)	0.26
เส้นผ่านศูนย์กลางภายในท่อ, D_i (m)	0.20
อีลาสติกโมดูลัสของท่อ, E (N/m ²)	2.07E+11
ความหนาแน่นของท่อ, ρ_p (kg/m ³)	7,850
ความหนาแน่นของน้ำทะเล, ρ_c (kg/m ³)	1,025
ความหนาแน่นของไหลภายในท่อ, ρ_f (kg/m ³)	998
น้ำหนักประสิทธิผลของท่อ, w_a (N/m)	1,442.53
ความยาวท่อ, s (m)	1,600
ความลึกทะเล, y_H (m)	1,000
ระยะในแนวราบระหว่างปลายบนและปลายล่างของท่อ, x_H (m)	800
แรงดึงที่ปลายบนของท่อ, N_{aH} (kN)	1,610
สติฟเนสของดินใต้ทะเล, k_s (N/m)	10,000
ความเร็วของไหลภายในท่อ, V_f (m/s)	5.0
ความเร็วกระแสน้ำ, V_{cH} (m/s)	1.0
สัมประสิทธิ์แรงลากในทิศทางตั้งฉาก, C_{Dn}	0.70
สัมประสิทธิ์แรงลากในแนวสัมผัส, C_{Dt}	0.03
สัมประสิทธิ์ของมวลส่วนเพิ่ม, C_a	1.00

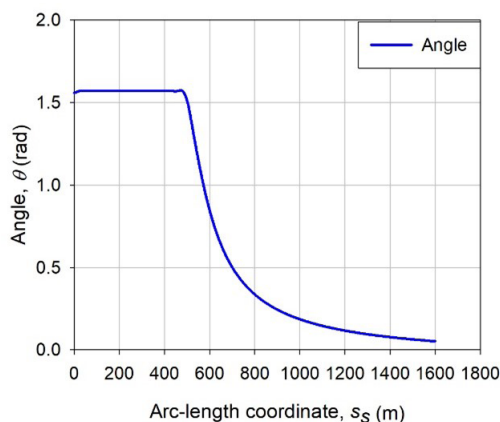
เพื่อให้สามารถเข้าใจพฤติกรรมการสั่นอิสระในระนาบ ($x - y$) และนอกระนาบ (z) ของท่อ จำเป็นต้องพิจารณาลักษณะรูปร่างการวางตัวของท่อที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ ดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งแสดงรูปร่างของท่อในระนาบ 2 มิติ ($x - y$) ที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ ดังนั้นค่าพิคตของท่อที่ตำแหน่งต่างๆ ในทิศทาง z จะเท่ากับศูนย์ จากรูปที่ 2 พบว่า ส่วนประกอบของท่อแบบคาร์ทีนารีจะประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกจะทำปฏิสัมพันธ์กับดินใต้ทะเลและพาดในทิศทางแนวราบกับท้องน้ำ ส่วนที่สองจะแขวนอยู่ระหว่างท้องน้ำ



รูปที่ 2 รูปร่างการวางตัวของท่อลำเลียงของไหลที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์



รูปที่ 4 ค่าความโค้งที่ตำแหน่งต่างๆของท่อลำเลียงของไหล



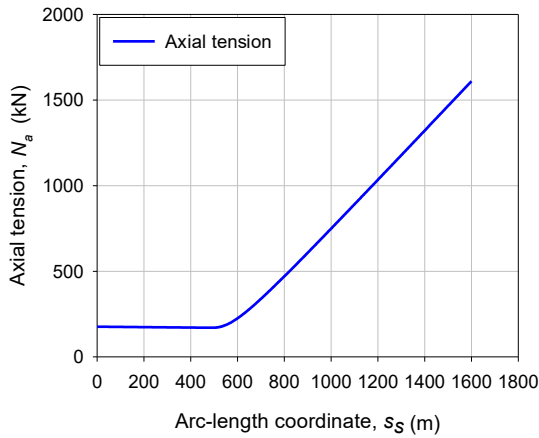
รูปที่ 3 มุมที่ตำแหน่งต่างๆของท่อลำเลียงของไหล

กับผิวน้ำ ทั้งนี้จะมีจุด TDP เป็นตัวคั่นแบ่งระหว่าง 2 ส่วนนี้ ซึ่งพบว่า ตำแหน่งของจุด TDP อยู่ที่พิกัดตามความโค้ง s_s เท่ากับ 487.8 เมตร

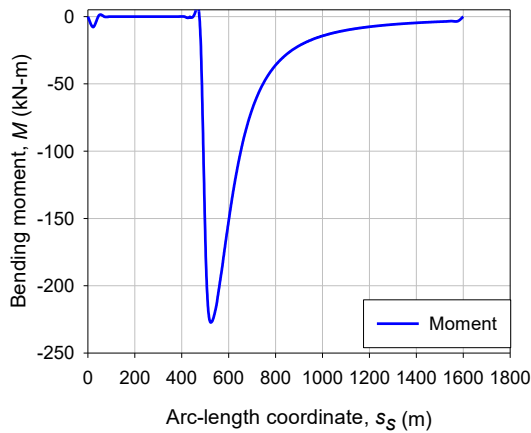
ค่ามุมที่วัดระหว่างแนวสัมผัสของท่อกับแนวตั้ง (y) ที่ตำแหน่งต่างๆตามพิกัดความยาวส่วนโค้ง (s_s) ได้แสดงในรูปที่ 3 โดยค่าความโค้งของท่อหรือค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงมุมของท่อเทียบกับตัวแปร s_s ได้แสดงในรูปที่ 4 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าท่อส่วนที่วางราบสัมผัสกับดินใต้ท้องน้ำจะมีค่าความโค้งน้อยมาก และมีค่ามากที่สุดบริเวณจุด TDP จากนั้นค่าความโค้งจะลดลงจนถึงศูนย์ที่ปลายด้านบนของท่อบริเวณผิวน้ำ

รูปที่ 5 และ 6 แสดงค่าแรงดึงตามแนวแกน และโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่งต่างๆ ของท่อ ซึ่งพบว่า แรงดึงของท่อจะลดลงตามระดับความลึกทะเล และจะมีค่าคงที่เมื่อท่อสัมผัสกับท้องน้ำแล้ว ทั้งนี้เนื่องจากการศึกษาไม่ได้พิจารณาแรงเสียดทานระหว่างท่อและผิวดิน ดังนั้นแรงดึงตามแนวแกนของท่อจะคงที่โดยไม่สามารถส่งถ่ายแรงดึงในท่อผ่านแรงเสียดทานไปยังผิวดินได้ นอกจากนั้นยังพบว่าค่าโมเมนต์ดัดซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับค่าความโค้งของท่อจะมีค่ามากที่สุดที่บริเวณจุด TDP หรือจุดที่ท่อเริ่มสัมผัสกับท้องน้ำซึ่งเป็นจุดที่ต้องระมัดระวังเป็นพิเศษในขั้นตอนการออกแบบท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารี

ผลการวิเคราะห์การสั่นอิสระของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบคาร์ทีนารีได้แสดงไว้ในตารางที่ 4 และรูปที่ 7-11 ตารางที่ 4 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นอิสระของท่อ ซึ่งในที่นี้ได้นำเสนอเพียง 10 โหมดแรกของการสั่นที่มีค่าความถี่ธรรมชาติต่ำที่สุดและมีโอกาสเกิดได้ง่ายที่สุด การวิเคราะห์พบว่า การสั่นอิสระของท่อลำเลียงของไหลที่วางตัวอยู่ในระนาบ 2 มิติที่สภาวะสมดุลสถิตยจะเกิดการสั่นทางด้านข้างแบบในระนาบ (IP) และนอกระนาบ (OP) แยกจากกันชัดเจนสำหรับ 10 โหมดแรก จากลำดับโหมดของการสั่นและค่าความถี่ธรรมชาติของท่อพบว่าท่อจะเกิดการสั่นนอกระนาบได้ง่ายกว่า และสามารถเกิดได้ก่อนการสั่นในระนาบ ทั้งนี้เนื่องจากท่อมีค่าสติเฟนส์ด้านการสั่นในระนาบมากกว่า



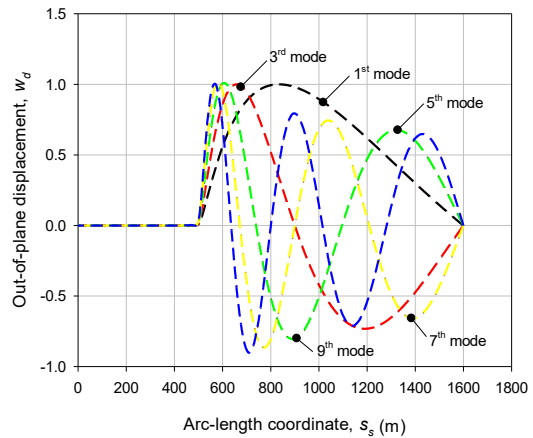
รูปที่ 5 แรงดึงตามแนวแกนที่ตำแหน่งต่างๆ ของท่อลำเลียงของไหล



รูปที่ 6 โมเมนต์ดัดที่ตำแหน่งต่างๆ ของท่อลำเลียงของไหล

การสั่นนอกระนาบ สติฟเนสนี้เรียกว่าสติฟเนสเนื่องจาก รูปร่างเชิงเรขาคณิต (Geometric Stiffness)

ลำดับโหมดเลขคู่เป็นการสั่นนอกระนาบ (ทิศทาง z) ลำดับโหมดเลขคี่เป็นการสั่นในระนาบ (ระนาบ $x - y$) โดยการแยกโหมดการสั่นของท่อสามารถทำได้โดยพิจารณาค่า การเคลื่อนที่ที่พลศาสตร์ดังแสดงในรูปที่ 7-9 รูปที่ 7 แสดง ค่าการเคลื่อนที่ w_d จากการสั่นอิสระนอกระนาบ (ทิศทาง z) ของท่อสำหรับโหมดเลขคี่ โดยที่ค่าการเคลื่อนที่ในระนาบ $x - y$ เท่ากับศูนย์ ($u_d = v_d = 0$) จากรูปที่ 7 พบว่า ส่วนของ ท่อที่สัมผัสกับดินใต้ท้องน้ำจะเกิดการสั่นน้อยมากเนื่องจาก



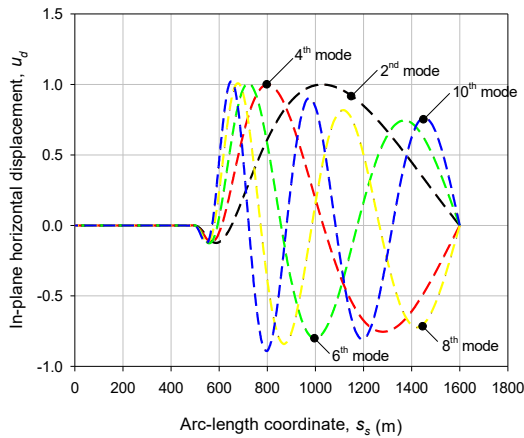
รูปที่ 7 ค่าการเคลื่อนที่จากการสั่นอิสระนอกระนาบ (ทิศทาง z) ของท่อในลำดับโหมดต่างๆ

ท่อถูกยึดไว้จากปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับดิน แอมพลิจูด ของการสั่นนอกระนาบจะมีค่ามากบริเวณใกล้ๆ กับท้องน้ำ เนื่องจากแรงดึงตามแนวแกนที่บริเวณนี้จะต่ำเมื่อเทียบกับ ค่าที่บริเวณผิวน้ำ จึงทำให้สติฟเนสตามแนวแกนของท่อ มีค่าน้อยที่บริเวณใกล้ท้องน้ำและทำให้เกิดการสั่นด้วย แอมพลิจูดใดๆ ที่บริเวณใกล้ท้องน้ำ นอกจากนั้น จำนวน จุดดัดกลับของค่าการเคลื่อนที่จะเพิ่มขึ้นเมื่อโหมดการสั่นมี ลำดับสูงขึ้นซึ่งแสดงลักษณะการสั่นที่เกิดได้ยากมากขึ้น

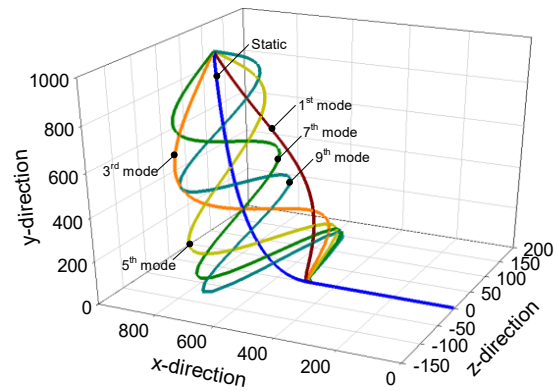
ตารางที่ 4 ความถี่ธรรมชาติของท่อลำเลียงของไหล

ลำดับโหมด	ความถี่ธรรมชาติ, ω (rad/s)
1. (Out-of-plane)	0.14191
2. (In-plane)	0.20450
3. (Out-of-plane)	0.28574
4. (In-plane)	0.36650
5. (Out-of-plane)	0.42894
6. (In-plane)	0.52618
7. (Out-of-plane)	0.57317
8. (In-plane)	0.67924
9. (Out-of-plane)	0.71899
10. (In-plane)	0.83443

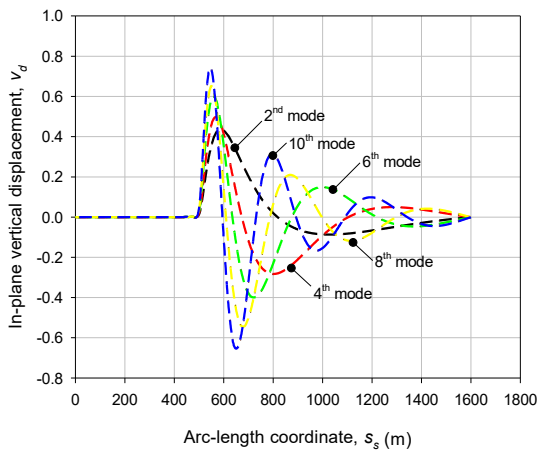
รูปที่ 8 และ 9 แสดงค่าการเคลื่อนที่ในแนวราบ u_d และการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง v_d สำหรับการสั่นอิสระในระนาบ



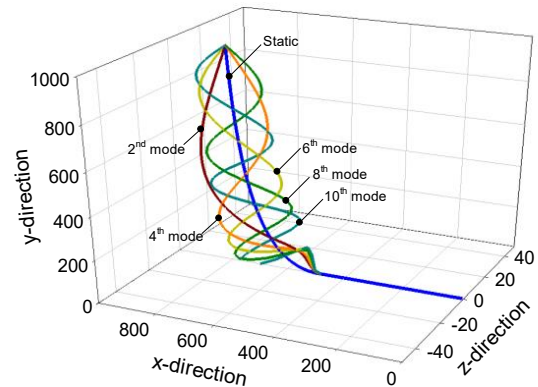
รูปที่ 8 รูปร่างการสั่นอิสระในระนาบในทิศทางแนวราบของท่อในลำดับโหมดต่างๆ



รูปที่ 10 รูปร่างการวางตัวที่สภาวะพลศาสตร์สำหรับโหมดการสั่นอิสระนอกระนาบของท่อ



รูปที่ 9 รูปร่างการสั่นอิสระในระนาบในทิศทางแนวตั้งของท่อในลำดับโหมดต่างๆ



รูปที่ 11 รูปร่างการวางตัวที่สภาวะพลศาสตร์สำหรับโหมดการสั่นอิสระในระนาบของท่อ

ของท่อ (โหมดคู่) โดยที่ค่าการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับศูนย์ ($w_d = 0$) โดยลักษณะการเคลื่อนที่ของท่อจะคล้ายกับกรณีการสั่นนอกระนาบ กล่าวคือ แอมพลิจูดของการสั่นสูงสุดจะเกิดขึ้นบริเวณใกล้ท่อน้ำ และจำนวนจุดดัดกลับของค่าการเคลื่อนที่จะเพิ่มขึ้นเมื่อโหมดการสั่นมีลำดับสูงขึ้น อย่างไรก็ตาม ค่าการเคลื่อนที่ที่ทางแนวราบจะมากกว่าการเคลื่อนที่แนวตั้ง

รูปที่ 10 และ 11 แสดงรูปร่างการวางตัวใน 3 มิติของท่อที่สภาวะพลศาสตร์จากการสั่นอิสระนอกระนาบ (โหมดคู่)

และการสั่นอิสระในระนาบ (โหมดคู่) ตามลำดับ ซึ่งได้จากการบวกค่าพิกัดของท่อที่สภาวะสมดุลสถิตย์กับค่าการเคลื่อนที่พลศาสตร์ เนื่องจากค่าการเคลื่อนที่เป็นค่าไร้หน่วย ในที่นี้จึงนำค่าการเคลื่อนที่มาคูณค่าแพ็คเกจอร์กับ 150 ก่อนเพื่อขยายลักษณะรูปร่างการสั่นให้ชัดเจนขึ้น ลักษณะการสั่นของท่อจากรูปนี้ก็จะสอดคล้องกับค่าการสั่นของท่อในรูป 7-9

4. สรุป

งานวิจัยนี้นำเสนอพฤติกรรมการสั่นอิสระในระนาบ



และนอกระนาบของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลลึกแบบคาร์ทีนารี แบบจำลองคณิตศาสตร์พัฒนาขึ้นโดยใช้หลักการงานและพลังงาน จากนั้นใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลข ได้แก่รูปร่างการวางตัวและแรงภายในที่เกิดขึ้นกับท่อที่สภาวะสมดุลสถิตศาสตร์ในระนาบ 2 มิติ โดยพบว่า จุด TDP จะมีโมเมนต์ดัดสูงมากซึ่งจำเป็นต้องคำนึงถึงในกระบวนการวิเคราะห์และออกแบบท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบคาร์ทีนารี สำหรับการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติ และรูปแบบการสั่นของท่อพบว่า ท่อลำเลียงของไหลแบบคาร์ทีนารีที่วางตัวในระนาบ 2 มิติจะเกิดการสั่นอิสระในระนาบ และนอกระนาบแยกจากกันชัดเจนตามลำดับโหมดที่พิจารณา โดยที่โหมดการสั่นอิสระนอกระนาบซึ่งมีความถี่ธรรมชาติของการสั่นต่ำกว่าจะมีโอกาสเกิดก่อนการสั่นอิสระในระนาบ แอมพลิจูดสูงสุดของการสั่นจะเกิดขึ้นบริเวณใกล้ท่อขนาน จำนวนจุดดัดกลับของรูปร่างการสั่นจะเพิ่มขึ้นตามโหมดการสั่นที่สูงขึ้น

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ สำหรับการสนับสนุนงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] C. P. Sparks, *Fundamentals of marine riser mechanics: Basic principles and simplified analyses*, Pennwell Corporation, Oklahoma, USA, 2007.
- [2] E. H. Phifer, F. Kopp, R. C. Swanson, D. W. Allen, and C. G. Langner, "Design and installation of auger steel catenary risers," presented at the Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC 7620, 1994.
- [3] B. B. Mekha, "New frontiers in the design of steel catenary risers for floating production systems," *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 123, no. 4, pp. 153–158, 2001.
- [4] O. B. Serta, M. M. Mourelle, F. W. Grealish, S. J. Harbert, and L. F. A. Souza, "Steel catenary riser for the marlim field FPS P-XVIII," presented at the Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC 8069, 1996.
- [5] J. Wang, S. Fu, R. Baarholm, J. Wu, and C. M. Larsen, "Fatigue damage of a steel catenary riser from vortex-induced vibration caused by vessel motions," *Marine Structures*, vol. 39, pp. 131–156, 2014.
- [6] K. Klaycham, C. Athisakul, and S. Chucheepsakul, "Nonlinear response of marine riser with large displacement excited by Top-end vessel motion using penalty method," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 20, no. 4 pp. 1–25, 2020.
- [7] H. Chen, S. Xu, and H. Guo, "Nonlinear analysis of flexible and steel catenary risers with internal flow and seabed interaction effects," *Journal of Marine Science and Application*, vol. 10, pp. 156–162, 2011.
- [8] C. Athisakul, T. Phanyasachart, K. Klaycham, and S. Chucheepsakul, "Static equilibrium configurations and appropriate applied top tension of extensible marine riser with specified total arc-length using finite element method," *Engineering Structures*, vol. 34, pp. 271–277, 2012.
- [9] C. Athisakul, K. Klaycham, and S. Chucheepsakul, "Critical top tension for static equilibrium configuration of a steel catenary riser," *China Ocean Engineering*, vol. 28, no. 6, pp. 829–842, 2014.



- [10] I.K. Chatjigeorgiou, "A finite differences formulation for the linear and nonlinear dynamics of 2D catenary risers," *Ocean Engineering*, vol. 35, no. 7, pp. 616–636, 2008.
- [11] I. K. Chatjigeorgiou, "Three dimensional nonlinear dynamics of submerged, extensible catenary pipes conveying fluid and subjected to end-imposed excitations," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 45, no. 7, pp. 667–680, 2010.
- [12] G. Moe and Ø. Arntsen, "An analytic model for static analysis of catenary risers," in *Proceedings of the 10th International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium*, 20001, pp. 248–253.
- [13] S. C. Li and N. Chau, "Dynamic Response of Deepwater Lazy-wave Catenary Riser," presented at the Deep Offshore Technology International, Amsterdam, Netherlands, December 2010.
- [14] K. Klaycham, C. Athisakul, and S. Chucheeepsakul, "Nonlinear vibration of marine riser with large displacement," *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 22, no. 2, pp. 361–375, 2017.
- [15] K. Klaycham, C. Athisakul, and S. Chucheeepsakul, "Large amplitude vibrations of a deepwater riser conveying oscillatory internal fluid flow," *Ocean Engineering*, vol. 217, pp. 107966–1–15, 2020.
- [16] J. R. Morison, M.P. O'Brien, J. W. Johnson, and S. A. Schaaf, "The force exerted by surface waves on piles," *Petroleum Transactions, American Institute of Mining Eng*, vol. 189, pp. 149–154, 1950.
- [17] C. Athisakul, T. Monprapussorn, and S. Chucheeepsakul, and A. Variational, "Formulation for three-dimensional analysis of extensible marine riser transporting fluid," *Ocean Engineering*, vol. 38, no. 4, pp. 609–620, 2011.
- [18] C. P. Pesce, A. L. C. Fajarra, R. T. Goncalves, G. R. Franzini, R. Salles, and P. Mendes, "further experimental investigations on vortex self-induced vibrations (VSIV) with a small-scale catenary riser model," in *Proceedings of the 36th International Conference on Ocean, Offshores Mechanics and Arctic Engineer OMAE2017*, 2017, pp. 1–12.