วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ปีที่ 27 ฉบับที่ 1 ม.ค.–เม.ย. 2560
The Journal of KMUTNB., Vol. 27, No. 1, Jan.–Apr. 2017

บทความวิจัย

การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ

อภิญญา ปริสุทธิพงศ์* ยุพาภรณ์ อารีพงษ์ และ เสาวณิต สุขภารังษี
ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 09-8549-9561 อีเมล: apinya_2638@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.04.005
รับเมื่อ 1 มีนาคม 2559 ตอบรับเมื่อ 7 เมษายน 2559 เผยแพร่ออนไลน์ 23 กันยายน 2559
© 2017 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ โดยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA) และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) กับวิธีการจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation: MC) เกณฑ์ที่ใช้ในการวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม คือ ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล ซึ่งจากการศึกษาพบว่า ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ที่ได้จากวิธี MCA และวิธี MC มีค่าประมาณใกล้เคียงกัน แต่วิธี MCA ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่า

คำสำคัญ: แผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์, ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย, วิธีลูกโซ่มาร์คอฟ, วิธีการจำลองมอนติคาร์โล

การอ้างอิงบทความ: อภิญญา ปริสุทธิพงศ์ ยุพาภรณ์ อารีพงษ์ และ เสาวณิต สุขภารังษี, "การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 27, ฉบับที่ 1, หน้า 139–146, ม.ค.–เม.ย. 2560

วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ปีที่ 27 ฉบับที่ 1 ม.ค.–เม.ย. 2560
The Journal of KMUTNB., Vol. 27, No. 1, Jan.–Apr. 2017

Research Article

An Approximation of Average Run Length for Nonparametric Arcsine EWMA Sign Control Chart Using Markov Chain Approach

Apinya Prarisudtipong*, Yupaporn Areepong and Saowanit Sukparungsee
Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Sciences, King Moungkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 09-8549-9561, E-mail: apinya_2638@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.04.005
Received 1 March 2016; Accepted 7 April 2016; Published online: 23 September 2016
© 2017 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

The objectives of this paper are to study an approximation for the Average Run Length (ARL) by Markov Chain Approach (MCA) of Nonparametric Arcsine EWMA Sign Control Chart and to compare the computational times with Monte Carlo Simulation method (MC). The measurement of control chart efficacy are an Average Run Length (ARL) and computational times. The results found that the numerical approximation obtained from MCA are similar to the one from MC, however MCA use less time.

Keywords: Nonparametric Arcsine EWMA Sign Control Chart, Average Run Length, Markov Chain Approach, Monte Carlo Simulation Method

Please cite this article as: A. Prarisudtipong, Y. Areepong, and S. Sukparungsee, "An approximation of average run length for nonparametric arcsine EWMA sign control chart using markov chain approach," *The Journal of KMUTNB.*, vol. 27, no. 1, pp. 139–146, Jan.–Apr. 2017 (in Thai).

1. บทนำ

การควบคุมคุณภาพของผลิตภัณฑ์ถือเป็นปัจจัยสำคัญที่ผู้ผลิตต้องควบคุม เนื่องจากในปัจจุบันธุรกิจและอุตสาหกรรมมีการแข่งขันกันเป็นจำนวนมาก เทคโนโลยีในการผลิตเป็นสิ่งสำคัญ ความต้องการของผู้บริโภคมีความหลากหลายและเปลี่ยนแปลงไปตามยุคสมัย เมื่อการผลิตมีปริมาณมาก เราใช้การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (Statistical Process Control: SPC) ซึ่งเป็นการนำวิธีการทางสถิติมาใช้เป็นเครื่องมือในการควบคุมกระบวนการให้มีความสม่ำเสมอ และตรงตามมาตรฐานของผลิตภัณฑ์ ซึ่งเครื่องมือทางสถิติที่นิยมนำมาใช้คือ แผนภูมิควบคุม (Control Chart) มีหน้าที่หลัก คือ เพื่อตรวจสอบความผันแปรของกระบวนการผลิต เพื่อควบคุมคุณภาพของกระบวนการผลิตให้มีความสม่ำเสมอ เพื่อให้การผลิตบรรลุเป้าหมาย และใช้เพื่อปรับปรุงกระบวนการผลิต

แผนภูมิควบคุมเป็นหนึ่งในเครื่องมือพื้นฐานที่ใช้ในการควบคุมคุณภาพ และใช้กันอย่างแพร่หลาย ในปี ค.ศ. 1924 มีผู้คิดค้นและนำเสนอแผนภูมิควบคุมขึ้นมาใช้เป็นคนแรกคือ Dr. Walter Andrew Shewhart ซึ่งเป็นแผนภูมิที่มีความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยเมื่อกระบวนการเกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ ($\delta > 1.5\sigma$) เนื่องจากแผนภูมิชนิดนี้ไม่ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีต (Memory Less) และต่อมานักวิจัยที่สนใจความสำคัญของข้อมูลในอดีตได้คิดค้นแผนภูมิควบคุมที่ใช้สำหรับการตรวจจับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก เช่น แผนภูมิควบคุมรวมสะสม (Cumulative Sum Control Chart: CUSUM) ซึ่งถูกเสนอโดย Page [1] มีประสิทธิภาพในการตรวจจับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดเล็ก ($\delta \leq 1.5\sigma$) และต่อมา Roberts [2] ได้เสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average: EWMA) ซึ่งมีความสามารถในการตรวจจับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก ($\sigma < 1.5$) ได้ดีกว่าแผนภูมิอื่น แผนภูมิควบคุมที่ใช้กันโดยทั่วไปข้อมูลมักจะมีการแจกแจงปกติหรือการแจกแจงในรูปแบบอื่น แต่ในกรณีที่เราไม่ทราบว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบใด แผนภูมิควบคุมทางสถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์จึงเป็นอีกทางเลือกที่เหมาะสม จากแนวคิดของ Taguchi ที่กล่าวว่า ค่าเป้าหมายมีความจำเป็นสำหรับการวัดของกระบวนการที่สำคัญ มีการอ้างถึงใน Gopalakrishnan, *et al*. [3] และต่อมาได้มีผู้เสนอแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ (Nonparametric Arcsine Exponentially Weighted Moving Average Sign Control Chart) นำเสนอโดย Yang, Lin and Cheng [4] ซึ่งมีแนวคิดในการตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนของค่าเป้าหมาย (ค่าเฉลี่ย) ของกระบวนการและไม่จำเป็นต้องทราบการแจกแจง โดยนำสถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์มาใช้ในการจัดการกับข้อมูล โดยใช้ Arcsine ในการแปลงข้อมูล Mosteller and Youtz [5] ซึ่งทำให้ข้อมูลที่แปลงแล้วมีการแจกแจงใกล้เคียงการแจกแจงปกติ และมีความสามารถในการตรวจจับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กถึงปานกลาง โดยใช้ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) เป็นเกณฑ์ในการวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิ

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) โดยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA) ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) กับวิธีการจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation: MC) โดยที่วิธี MCA ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าและให้ความถูกต้องแม่นยำเทียบเท่ากับผลลัพธ์ของวิธีการ MC

2. ทฤษฎีเกี่ยวกับแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์

แผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ เป็นแผนภูมิที่พัฒนามาจากแผนภูมิควบคุม EWMA Sign ซึ่งมีค่า ARL ที่ไม่เหมาะสม เมื่อทำการกำหนดค่ามาตรฐานที่ 370 และ $p = 0.5$ เป็นสาเหตุให้เกิด

การแจกแจงทวินามที่ไม่สมมาตรสำหรับกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็กถึงปานกลาง เราจึงทำการแก้ปัญหานี้โดยการใช้ Arcsine ในการแปลงข้อมูล
นิยามให้

$$Y_i = X_i - T;\ i = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

เมื่อ Y_i คือค่าความคลาดเคลื่อนของค่าเป้าหมาย
X_i คือค่าสังเกต
T คือค่าเป้าหมาย
และ

$$I_i = \begin{cases} 1 : Y_i > 0 \\ 0 : otherwise \end{cases} \tag{2}$$

โดยที่ I_i คือผลลัพธ์จากการตรวจสอบเงื่อนไขค่าความคลาดเคลื่อน จากค่าเป้าหมายของกระบวนการ และให้ M เป็นจำนวนผลรวมของ I_i เมื่อ Y_i มากกว่า 0 ทำให้ $M = \sum_{i=1}^{n} I_i$ โดยนำ Arcsine มาใช้ในการแปลงข้อมูล โดยให้ $Y = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{M}{n}}\right)$ จะทำให้ Y_i มีการแจกแจกใกล้เคียงการแจกแจงปกติ ซึ่งค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ สามารถเขียนตัวแบบได้ดังนี้

$$EWMA_{Y_i} = \lambda Y_i + (1-\lambda) EWMA_{Y_{i-1}} \tag{3}$$

โดยที่ λ คือค่าสัมประสิทธิ์การปรับเรียบของแผนภูมิ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของตัวสถิติคือ $EWMA_{Y_0}$ และเป็นค่าเฉลี่ยของค่าสังเกต Y และให้ ค่าเฉลี่ยของตัวสถิติ Arcsine EWMA Sign คือ $EWMA_{Y_0} = sin^{-1}\sqrt{0.5}$

$$E(EWMA_{Y_i}) = sin^{-1}\sqrt{p} \tag{4}$$

ความแปรปรวนของตัวสถิติ Arcsine EWMA Sign คือ

$$Var(EWMA_{Y_i}) = \frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}\left(\frac{1}{4n}\right) \tag{5}$$

เมื่อ $0 < (1-\lambda) < 1$ และ $i \to \infty$ จะได้ $(1-\lambda)^{2i} \to 0$ ดังนั้นจะได้ค่าความแปรปรวน คือ

$$Var\,(EWMA_{Y_i}) = \frac{\lambda}{2-\lambda}\left(\frac{1}{4n}\right) \tag{6}$$

ในบทความนี้จะใช้ค่า Asymptotic ของความแปรปรวนในสมการ (6) โดยมีค่าขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign ดังนี้

$$UCL_{EWMA_{Y_i}} = sin^{-1}\left(\sqrt{p}\right) + k\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(\frac{1}{4n}\right)} \tag{7}$$

$$CL_{EWMA_{Y_i}} = sin^{-1}\left(\sqrt{p}\right) \tag{8}$$

$$LCL_{EWMA_{Y_i}} = sin^{-1}\left(\sqrt{p}\right) - k\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(\frac{1}{4n}\right)} \tag{9}$$

เมื่อ k คือสัมประสิทธิ์ความกว้างของขีดจำกัดควบคุม

3. การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธี MCA สำหรับแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์

ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) คือจำนวนค่าสังเกตเฉลี่ยที่ต้องการตรวจสอบจนกระทั่งพบค่าสังเกตออกนอกขีดจำกัดควบคุมเป็นครั้งแรก แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ ค่ายาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (In–Control Process) แทนด้วย ARL_0 และเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Out-of-Control Process) แทนด้วยสัญลักษณ์ ARL_1

การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ยด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (MCA) นี้สามารถใช้ได้กับทุกการแจกแจงรวมถึงกรณีที่เราไม่ทราบการแจกแจงด้วย วิธีนี้เป็นการประยุกต์ใช้เมทริกซ์ผกผันมาใช้ในการประมาณค่า โดยกำหนดค่าสังเกต x_j เมื่อ $j = 1,2,\ldots,n$ เป็นสถานะที่กระบวนการผลิต

อยู่ภายใต้การควบคุม และเมื่อ $j = n + 1$ เป็นสถานที่กระบวนการผลิตไม่อยู่ภายใต้การควบคุม สามารถแทนเมทริกซ์ความน่าจะเป็น P_{ij} ได้ดังนี้

$$P_{ij} = (X_{ij} = x_j \mid X_t = x_j)$$

เมื่อ P_{ij} คือความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะที่ i ไปยังสถานะที่ j
จะได้

$$\boldsymbol{P} = \left[\begin{array}{ccc|c} P_{11} & \cdots & P_{1n} & P_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} & P_{n,n+1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

หรือ

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

และกำหนดความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะที่ i ดังสมการต่อไปนี้

$$\boldsymbol{P}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^i & (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}^i)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$\boldsymbol{R}^i$ คือเมทริกซ์ย่อยของ P_{ij} สถานะ $1,2,\ldots,n$ ขนาด $n \times n$ ในลำดับที่ i

$\boldsymbol{I}$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) ขนาด $n \times n$

$\mathbf{1}$ คือเวกเตอร์หนึ่ง ขนาด $n \times 1$

$\mathbf{0}$ คือเวกเตอร์ศูนย์ ขนาด $1 \times n$

1 คือสเกลาร์ที่มีค่าเท่ากับ 1

โดยที่ $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^i)\mathbf{1}$ คือเวกเตอร์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะที่ $i \le n + 1$ ในลำดับที่ i

การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ของวิธี MCA จาก Lucas and Saccucci [6] คำนวณได้ดังนี้

$$ARL(t) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(RL = i) \tag{10}$$

เมื่อแทนค่า $P(RL = i) = \boldsymbol{P}^{(i)T} - (\boldsymbol{R}^{i-1} - \boldsymbol{R}^i)\mathbf{1}$ ในสมการที่ (10) จะได้ค่า ARL ด้วยวิธี MCA ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ ดังนี้

$$\begin{aligned} ARL(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{P}^{(i)T}(\boldsymbol{R}^{i-1} - \boldsymbol{R}^i)\mathbf{1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}^{(i)T}\boldsymbol{R}^i\mathbf{1} \\ &= \boldsymbol{P}^{(i)T}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}\mathbf{1} \end{aligned} \tag{11}$$

เมื่อ $\boldsymbol{P}^{(i)T}$ คือเวกเตอร์ความน่าจะเป็นเริ่มต้น สำหรับการคำนวณค่า ARL ด้วยวิธี MCA สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ P_{ij} ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P_{ij} = P(&LCL_{EWMA_{Y_i}} < EWMA_{Y_i} < UCL_{EWMA_{Y_i}} \mid \\ &EWMA_{Y_{i-1}} = CL_{EWMA_{Y_i}}) \end{aligned} \tag{12}$$

กำหนดให้ในแต่ละช่วงย่อยที่ j มีค่าขีดจำกัดควบคุมบน (h_U) จุดกึ่งกลางช่วงย่อยที่ i (CL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (h_L) ดังสมการต่อไปนี้

$$UCL_{EWMA_{Y_i}} = h_L + \frac{j(h_U - h_L)}{n}$$

$$CL_{EWMA_{Y_i}} = h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2n}$$

$$LCL_{EWMA_{Y_i}} = h_L + \frac{(j-1)(h_U - h_L)}{n}$$

และแทน $EWMA_{Y_i} = (1–\lambda)\ EWMA_{Y_{i-1}}$ ในสมการ (12) จะได้

$$P_{ij} = P\begin{pmatrix} LCL_{EWMA_{Y_i}} < \lambda Y_i + (1-\lambda)\,EWMA_{Y_{i-1}} \\ < UCL_{EWMA_{Y_i}} \mid EWMA_{Y_{i-1}} = CL_{EWMA_{Y_i}} \end{pmatrix}$$

$$= P\left(\begin{array}{l} h_L + \dfrac{(j-1)(h_U - h_L)}{n} < \lambda Y_i + (1-\lambda)\left(h_L + \dfrac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2n}\right) \\ < h_L + \dfrac{j(h_U - h_L)}{n} \end{array} \right)$$

$$= P\left(\begin{array}{l} h_L + \dfrac{(j-1)(h_U - h_L)}{n} - (1-\lambda)\left(h_L + \dfrac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2n}\right) \\ < \lambda Y_i < h_L + \dfrac{j(h_U - h_L)}{n} - (1-\lambda)\left(h_L + \dfrac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2n}\right) \end{array} \right)$$

$$= P\left(\begin{array}{l} h_L + \dfrac{2(j-1)(h_U - h_L)}{2n\lambda} - (1-\lambda)\left(h_L + \dfrac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2n\lambda}\right) < Y_i \\ < h_L + \dfrac{2j(h_U - h_L)}{2n\lambda} - (1-\lambda)\left(h_L + \dfrac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2n\lambda}\right) \end{array} \right)$$

$$= P\left(\begin{array}{l} h_L + \dfrac{(h_U - h_L)}{2n\lambda}\left(2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1)\right) < Y_i \\ < h_L + \dfrac{(h_U - h_L)}{2n\lambda}\left(2j - (1-\lambda)(2i-1)\right) \end{array} \right)$$

4. การประมาณค่ายาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธี MC สำหรับแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์

ค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ของการจำลองด้วยวิธีการมอนติคาร์โล (MC) ค่า ARL สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$ARL = \frac{\sum_{t=1}^{N} RL_t}{N} \tag{13}$$

เมื่อ

RL_t คือจำนวนค่าสังเกตที่ถูกตรวจสอบจนกระทั่งพบค่าสังเกตออกนอกขีดจำกัดควบคุมเป็นครั้งแรกในการจำลองข้องมูลครั้งที่ t

n คือจำนวนครั้งของการทำซ้ำ

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (SARL)

$$SARL = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}\left(RL_t - ARL\right)^2} \tag{14}$$

เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times)

$$CPUTimes = \sum_{t=1}^{N} T_t \tag{15}$$

5. ผลการวิจัย

การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล ของการประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (MCA) ในงานวิจัยนี้กำหนดจำนวนโหนดเท่ากับ 500 โหนด และวิธีการจำลองมอนติคาร์โล (MC) มีจำนวนรอบในการทำซ้ำที่มีความแม่นยำ และมีความคลาดเคลื่อนต่ำสุด เท่ากับ 500,000 รอบ ทั้งนี้การกำหนดจำนวนโหนด และจำนวนรอบในการทำซ้ำจะกำหนดจากจำนวนที่ต่ำที่สุดที่ทำให้คำตอบของผลลัพธ์คงที่ ทำการประมวลผลโดยใช้โปรแกรม Mathematica ในระบบปฏิบัติการ Microsoft Windows 7 ผลลัพธ์ที่ได้แสดงดังตารางที่ 1–4

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความยาววิ่งเฉลี่ย และ CPU Times ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign โดยวิธี MCA และวิธี MC เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง n = 5, p_0 = 0.05 และ ARL_0 = 370

p_0	δ	วิธีการประมาณค่า	
		MCA	**MC**
0.05 (k = 0.5568)	0.00	370.279[a] (64.678)[b]	376.060[a] ± 0.531[c] (6840.630)b
	0.01	31.888 (64.849)	31.855 ± 0.028 (585.207)
	0.02	13.202 (63.711)	13.181 ± 0.007 (246.996)
	0.03	8.482 (64.413)	8.466 ± 0.004 (158.575)
	0.04	6.377 (64.693)	6.369 ± 0.003 (120.012)
	0.05	5.187 (63.383)	5.178 ± 0.002 (97.313)
	0.15	2.173 (64.382)	2.170±0.001 (43.899)
	0.25	1.818 (65.162)	1.813 ± 0.001 (39.078)

a คือค่าความยาววิ่งเฉลี่ย
b คือเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)
c คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ตารางที่ 2 ค่าประมาณความยาววิ่งเฉลี่ย และ CPU Times ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign โดยวิธี MCA และวิธี MC เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง n = 5, $p_0 = 0.1$ และ $ARL_0 = 370$

p_0	δ	วิธีการประมาณค่า	
		MCA	MC
0.1 (k = 0.5568)	0.00	370.279[a] (64.678)[b]	376.562[a] ± 0.532[c] (6753.190)[b]
	0.01	49.290 (64.023)	49.361 ±0.052 (1062.120)
	0.02	18.841 (66.659)	18.844 ± 0.013 (341.969)
	0.03	11.517 (64.663)	11.526 ± 0.006 (219.837)
	0.04	8.379 (65.551)	8.394 ± 0.004(162.085)
	0.05	6.652 (63.586)	6.661 ± 0.003 (135.284)
	0.15	2.541 (65.708)	2.545 ± 0.001 (52.417)
	0.25	1.960 (65.785)	1.960 ± 0.001 (42.822)

a คือค่าความยาววิ่งเฉลี่ย
b คือเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)
c คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ตารางที่ 3 ค่าประมาณความยาววิ่งเฉลี่ย และ CPU Times ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign โดยวิธี MCA และวิธี MC เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง n = 5, $p_0 = 0.05$ และ $ARL_0 = 500$

p_0	δ	วิธีการประมาณค่า	
		MCA	MC
0.05 (k = 0.5848)	0.00	500.195[a] (64.382)[b]	505.016[a] ± 0.716[c] (8936.070)[b]
	0.01	34.878 (63.477)	34.991 ± 0.031 (1182.280)
	0.02	14.019 (65.521)	14.048 ± 0.008 (357.274)
	0.03	8.935(64.038)	8.953 ± 0.004 (171.320)
	0.04	6.691 (63.555)	6.703 ± 0.003 (126.907)
	0.05	5.430 (63.258)	5.439 ± 0.002 (104.052)
	0.15	2.251 (65.115)	2.255 ± 0.001 (45.709)
	0.25	1.899 (63.913)	1.901 ± 0 (39.640)

a คือค่าความยาววิ่งเฉลี่ย
b คือเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)
c คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ตารางที่ 4 ค่าประมาณความยาววิ่งเฉลี่ย และ CPU Times ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign โดยวิธี MCA และวิธี MC เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง n = 5, p0 = 0.1 และ ARL0 = 500

p_0	δ	วิธีการประมาณค่า	
		MCA	MC
0.1 (k = 0.5848)	0.00	500.195[a] (63.134)[b]	505.055[a] ± 0.716[c] (10552.600)b
	0.01	55.240 (63.430)	55.316 ± 0.059 (1546.100)
	0.02	20.248 (63.539)	20.219 ± 0.014 (521.105)
	0.03	12.229 (64.802)	12.248 ± 0.006 (317.212)
	0.04	8.850 (63.992)	8.864 ± 0.004 (310.052)
	0.05	7.005 (64.974)	7.017 ± 0.003 (201.632)
	0.15	2.666 (64.023)	2.672 ± 0.001 (56.644)
	0.25	1.987 (63.492)	1.987 ± 0 (42.338)

a คือค่าความยาววิ่งเฉลี่ย
b คือเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)
c คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

6. อภิปรายผลและสรุป

การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ยด้วยวิธี MCA นั้นเป็นวิธีที่ให้ค่าประมาณที่แม่นยำ และยังใช้เวลาในการประมวลผลน้อย ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากตารางที่ 1 ถึง 4 แสดงการประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย ในกรณีเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุมที่ (ARL_0) เท่ากับ 370 และ 500 ตามลำดับ พบว่า ค่าประมาณความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ที่ได้จากวิธี MCA และวิธี MC มีค่าประมาณใกล้เคียงกัน แต่วิธี MCA ใช้เวลาในการประมวลผลประมาณ 63 วินาที ซึ่งใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่ามาก

เอกสารอ้างอิง

[1] E. S. Page, “Continuous inspection schemes,” *Biometrika*, vol. 41, pp. 100–114, 1954.

[2] S. W. Roberts, “Control chart tests based on geometric moving average,” *Technometrics*, vol. 1, pp. 239–250, 1959.

[3] B. Gopalakrishnan, *et al*., "Tolerance synthesis based on taguchi philosophy," *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, vol. 2, pp. 311–326, 2006.

[4] S. Yang, J. Lin, and S.W. Cheng, "A new nonparametric EWMA Sign control chart," *Expert Systems with Applications*, vol. 38, pp. 6239–6243, 2011.

[5] F. Mosteller and C.Youtz, "Tables of the freeman-tukey transformations for the binomial and poisson distributions," *Biometrika*, vol. 48, pp. 433–440, 1961.

[6] J. M. Lucas and M. S. Saccucci, "Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements," *Technometrices*, pp. 1–29, 1990.