



## ค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลงสำหรับตัวแบบถดถอยในตัวกำลังสอง

วชิรวิทย์ แก้วสอน ยูพาภรณ์ อารีพงษ์ และ เสาวณิต สุขภารังษี  
สาขาวิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 09 2426 9651 อีเมล: yupaporn.a@sci.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.07.011

รับเมื่อ 3 เมษายน 2566 แก้ไขเมื่อ 26 พฤษภาคม 2566 ตอรับเมื่อ 13 มิถุนายน 2566 เผยแพร่ออนไลน์ 14 กรกฎาคม 2566

© 2025 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### บทคัดย่อ

การวิจัยนี้ศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length; ARL) โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation; NIE) ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule) สำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart; Modified EWMA) สำหรับตัวแบบถดถอยในตัวกำลังสอง เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง นอกจากนี้ได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart; Modified EWMA) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Control Chart; EWMA) โดยเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมคือ ค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Out-of-Control Average Run Length; ARL1) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (CPU Times) จากผลการวิจัยพบว่า ค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี ให้ค่าใกล้เคียงกัน และเมื่อศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมพบว่า แผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง นอกจากนี้ยังได้นำค่าประมาณ ARL โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงอีกด้วย

**คำสำคัญ:** แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลง แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง วิธีกฎเกาส์ วิธีกฎค่ากลาง วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู วิธีกฎของซิมป์สัน

การอ้างอิงบทความ: วชิรวิทย์ แก้วสอน, ยูพาภรณ์ อารีพงษ์ และ เสาวณิต สุขภารังษี, “ค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลงสำหรับตัวแบบถดถอยในตัวกำลังสอง,” วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, ปีที่ 35, ฉบับที่ 1, หน้า 1-14, เลขที่บทความ 251-176851, ม.ค.-มี.ค. 2568.



## Average Run Length by Numerical Integral Equation of Modified EWMA Control Chart for Quadratic Autoregressive Process

Wachirawit Kaewsorn, Yupaporn Areepong and Saowanit Sukparungsee

Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

\* Corresponding Author, Tel. 09 2426 9651, E-mail: yupaporn.a@sci.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.07.011

Received 3 April 2023; Revised 26 May 2023; Accepted 13 June 2023; Published online: 14 July 2023

© 2025 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### Abstract

This research aims to study the approximation of the Average Run Length (ARL) by using the Numerical Integral Equation (NIE) methods including Gaussian Rule, Midpoint Rule, Trapezoidal Rule and Simpson's Rule on Modified Exponentially Weighted Moving Average control chart (Modified EWMA) in case of exponential white noise. In addition, the efficiency of Modified EWMA control chart is compared to Exponentially Weighted Moving Average control chart (EWMA). The performance measurement criteria of the control chart were measured in term of out-of-control Average Run Length (ARL1) and processing time (CPU Times). The results showed that the performance of all methods are hardly different. In addition, the performance of Modified EWMA control chart is better than EWMA control chart for all magnitudes of shift size. Moreover, the approximation ARL using NIE method can be utilized in a wide variety of real-world datasets to show the efficacy of the suggested method.

**Keywords:** Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart, Exponentially Weighted Moving Average Control Chart, Gaussian Rule, Midpoint Rule, Trapezoidal Rule, Simpson's Rule

Please cite this article as: W. Kaewsorn, Y. Areepong, and S. Sukparungsee, "Average run length by numerical integral equation of modified EWMA control chart for quadratic autoregressive process," *The Journal of KMUTNB*, vol. 35, no. 1, pp. 1-14, ID. 251-176851, Jan.-Mar. 2025 (in Thai).

## 1. บทนำ

ในกระบวนการผลิตทางอุตสาหกรรมได้มีการนำเครื่องจักรมาใช้ในกระบวนการผลิตผลิตภัณฑ์ ซึ่งในกระบวนการผลิตสามารถเกิดการผันแปรได้เสมอ ความผันแปรต่างๆ เกิดขึ้นได้จากหลายปัจจัย ซึ่งความผันแปรเหล่านี้จะส่งผลต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์ จึงมีแนวคิดเกี่ยวกับการควบคุมกระบวนการทางสถิติขึ้นเพื่อให้กระบวนการผลิตอยู่ในระดับมาตรฐานเดียวกัน

การควบคุมกระบวนการทางสถิติ (Statistical Process Control; SPC) เป็นการนำเอาวิธีการทางสถิติมาใช้ในการควบคุมกระบวนการผลิตเพื่อให้อยู่ในระดับมาตรฐานเดียวกัน ซึ่งช่วยให้มั่นใจว่ากระบวนการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยผลิตภัณฑ์ที่ตรงตามข้อกำหนดมากขึ้นโดยมีของเสียน้อยลง วิธีหรือเครื่องมือทางสถิติที่จะนำมาใช้เพื่อควบคุมกระบวนการผลิตมีหลากหลายวิธี เช่น แผ่นตรวจสอบ (Check Sheet) ฮิสโทแกรม (Histogram) แผนภาพพาเรโต (Pareto Diagram) แผนภาพก้างปลาหรือแผนภาพเหตุและผล (Fishbone Diagram or Cause and Effect Diagram) และแผนภูมิควบคุม (Control Chart) เป็นต้น ซึ่งเครื่องมือที่นิยมใช้และมีประสิทธิภาพ คือ แผนภูมิควบคุม เป็นแผนภูมิที่เขียนขึ้นโดยใช้หลักการทางด้านสถิติเพื่อเป็นเครื่องมือในการตรวจจับและควบคุมกระบวนการผลิตให้อยู่ในระดับมาตรฐานสม่ำเสมอ แต่แผนภูมิควบคุมไม่ได้นำไปใช้แค่สำหรับการควบคุมกระบวนการทางสถิติอีกต่อไป ยังสามารถนำแผนภูมิควบคุมไปพล็อตกับข้อมูลต่างๆ เช่น ข้อมูลหุ้น ข้อมูลสภาพอากาศ ข้อมูลในทางเศรษฐกิจ และข้อมูลด้านสุขภาพ เป็นต้น เพื่อระบุสาเหตุจากความผันแปรได้ สามารถช่วยระบุได้ว่ากระบวนการนั้นมีปัญหาหรือไม่ และระบุแหล่งที่มาของปัญหาได้ ว่าค่าเฉลี่ยสูงเกินไป ต่ำเกินไป หรือความผันแปรเป็นปัญหาหรือไม่

ใน ค.ศ.1924 แผนภูมิควบคุมถูกนำมาใช้ครั้งแรก โดย Shewhart [1] และนำแผนภูมิควบคุมมาใช้ในกระบวนการผลิตเรียกแผนภูมิควบคุมนี้ว่า แผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ท (Shewhart Control Chart) อย่างไรก็ตาม แผนภูมิควบคุม Shewhart มีประสิทธิภาพในการตรวจพบความผิดปกติของกระบวนการ

ได้ช้ากว่าแผนภูมิควบคุมอื่นๆ ใน ค.ศ. 1959 Roberts [2] ได้นำเสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Control Chart; EWMA) ซึ่งพบว่า แผนภูมิควบคุมนี้มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก แสดงให้เห็นว่าแผนภูมิควบคุม EWMA มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม Shewhart ใน ค.ศ. 2011 Patel และ Divecha [3] ได้นำเสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเลขชี้กำลังแบบดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart; Modified EWMA) แผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กและขนาดใหญ่ ต่อมาใน ค.ศ. 2017 Khan และคณะ [4] ได้พัฒนาแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเลขชี้กำลังแบบดัดแปลงใหม่ ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมที่เสนอเปรียบเทียบกับแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA ผลการวิจัยพบว่า แผนภูมิควบคุมที่เสนอมีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุมทั้ง 2 แบบ

โดยทั่วไปแล้วค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) นิยมใช้ในการวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ ค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม ( $ARL_0$ ) และค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม ( $ARL_1$ ) ใน ค.ศ. 2020 Sangaroonwong [5] ศึกษาวิธีการประมาณค่า ARL โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข โดยวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข (NIE) ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule) สำหรับแผนภูมิควบคุม Modified EWMA เมื่อค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA โดยเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมวัดจาก  $ARL_1$  จากผลการวิจัยพบว่า แผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง โดย



ทั่วไปแล้วแผนภูมิควบคุม EWMA ถูกนำมาใช้ในการตรวจจับข้อมูลที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบปกติ แต่ในความเป็นจริงแล้วลักษณะของข้อมูลจริงอาจเกิดขึ้นได้หลายรูปแบบซึ่งอาจอยู่ในตัวแบบอนุกรมเวลา

ตัวแบบอนุกรมเวลามีหลายลักษณะ เช่น ตัวแบบการถดถอยในตัว (Auto Regressive; AR) ตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average; MA) และตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถดถอยในตัว (Autoregressive and Moving Average; ARMA) เป็นต้น โดยทั่วไปแล้วตัวแบบอนุกรมเวลามีประโยชน์สำหรับการคาดการณ์ข้อมูลในอนาคต เช่น สามารถใช้สร้างข้อมูลอนุกรมเวลาทางการเงิน เช่น ราคาหุ้นหรืออัตราการแลกเปลี่ยน นอกจากนี้ยังสามารถใช้สร้างแบบจำลองข้อมูลอนุกรมเวลาทางชีววิทยาได้ เช่น อัตราการเต้นของหัวใจหรือความดันโลหิต เป็นต้น ใน ค.ศ. 2009 Haider [6] ตรวจสอบความสามารถในการคาดการณ์ของตลาดหลักทรัพย์ธากา (DSE) ของบังกลาเทศโดยพิสูจน์ว่าตลาดไม่ได้อ่อนแอ จากนั้นจึงคาดการณ์ดัชนีรายเดือนและผลตอบแทนโดยใช้กระบวนการ Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) สรุปได้ว่าการคาดการณ์มีความน่าเชื่อถือและสามารถช่วยในการระบุสภาพตลาดในอนาคตได้ และสามารถลดความเสี่ยงของการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ธากาได้ ใน ค.ศ. 2018 Phanthuna [7] เสนอวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับการหาค่า ARL ของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเลขชี้กำลังแบบตัดแปลงเมื่อข้อมูลมีตัวแบบ AR(1) เปรียบเทียบประสิทธิภาพของสูตรที่ชัดเจนที่ใช้ในการหาค่า ARL กับวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข ผลการวิจัยพบว่า ประสิทธิภาพของทุกวิธีไม่ต่างกัน แต่วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขนั้นง่ายกว่าในการคำนวณหาค่า ARL ใน ค.ศ. 2021 Karoon [8] ได้พัฒนาวิธีสมการเชิงปริพันธ์เชิงตัวเลข สำหรับการประมาณค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Extended EWMA สำหรับตัวแบบ AR(p) เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม Extended EWMA กับแผนภูมิควบคุม EWMA ผลการวิจัยพบว่า ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม Extended EWMA ดีกว่า

ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับขนาดของการเปลี่ยนแปลงทั้งหมด และวิธีการที่นำเสนอถูกนำมาใช้กับข้อมูลจริงสำหรับความต้องการออกซิเจนทางชีวเคมี (BOD)

โดยในงานวิจัยนี้ศึกษาวิธีการสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation; NIE) ได้แก่ วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) วิธีกึ่งกลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule) สำหรับแผนภูมิควบคุม Modified EWMA เมื่อข้อมูลเป็นแบบถดถอยในตัวกำลังสอง (Quadratic Trend AR(p)) เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยวัดจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) ว่าวิธีใดให้ค่าเวลาที่ต่ำที่สุด และเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุม Modified EWMA และแผนภูมิควบคุม EWMA โดยเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพวัดจากค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม ( $ARL_1$ ) นอกจากนี้ยังประยุกต์ใช้กับชุดข้อมูลจริงซึ่งเป็นข้อมูลเกี่ยวกับฝุ่นละออง PM<sub>2.5</sub>

## 2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

### 2.1 แผนภูมิควบคุม

2.1.1 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Control Chart; EWMA)

เสนอโดย Roberts [2] เป็นแผนภูมิควบคุมที่ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีตและปัจจุบัน ที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการผลิตที่มีขนาดเล็ก ซึ่งค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA แสดงสมการที่ (1) ดังนี้

$$E_t = (1 - \lambda)E_{t-1} + \lambda X_t; t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

โดยที่  $E_t$  แทน ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังตัดแปลง ณ เวลาที่  $t$

$\lambda$  แทน ค่าถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเป็นค่าคงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

$X_t$  แทน ค่าสังเกต ณ เวลาที่  $t$

2.1.2 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart; Modified EWMA)

เสนอโดย Patel และ Divecha [3] เป็นแผนภูมิควบคุมที่พัฒนาจากแผนภูมิควบคุม EWMA ซึ่งค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA แสดงสมการที่ (2) ได้ดังนี้

$$M_t = (1-\lambda)M_{t-1} + \lambda X_t + (X_t - X_{t-1}); t = 1, 2, \dots (2)$$

โดยที่  $M_t$  แทน ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลง (EWMA) ณ เวลาที่  $t$

$\lambda$  แทน ค่าถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเป็นค่าคงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

$X_t$  แทน ค่าสังเกต ณ เวลาที่  $t$

ต่อมาใน ค.ศ. 2017 Khan [4] ได้นำแผนภูมิควบคุมที่ถูกรับเสนอโดย Patel และ Divecha [3] มาพัฒนาต่อซึ่งค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA แสดงสมการที่ (3) ได้ดังนี้

$$Z_t = (1-\lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t + k(X_t - X_{t-1}); t = 1, 2, \dots (3)$$

โดยที่  $Z_t$  แทน ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลง ณ เวลาที่  $t$

$\lambda$  แทน ค่าถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเป็นค่าคงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

$k$  แทน ค่าคงที่

$X_t$  แทน ค่าสังเกต ณ เวลาที่  $t$

2.2 ตัวแบบถดถอยในตัวกำลังสอง (Quadratic Trend AR(p)) ดังสมการที่ (4) ดังนี้

$$\begin{aligned} X_t &= \eta + \beta t + \gamma t^2 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \\ X_t &= \eta + \beta t + \gamma t^2 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t; t = 1, 2, \dots \end{aligned} (4)$$

โดยที่  $X_t$  แทน ค่าสังเกต ณ เวลาที่  $t$

$\eta$  แทน ค่าคงที่

$\beta$  และ  $\gamma$  แทน ค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำลังสอง

$\phi_i$  แทน ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย

$\varepsilon_t$  แทน ค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

2.3 วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation; NIE)

กำหนดให้สมการปริพันธ์  $L(u) = ARL$  ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA เมื่อกำหนดให้  $u \in [0, b]$  ดังนั้นสมการปริพันธ์สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5)

$$ARL = L(u) = E_\infty(\tau_b) (5)$$

โดยที่  $\tau_b$  แทน คาบเวลาที่แผนภูมิควบคุมส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการออกนอกการควบคุม จะได้ว่า  $\tau = \inf\{t > 0 : Z_t \geq b\}$  เมื่อ  $b$  คือขีดจำกัดบน (UCL) ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA

ใน ค.ศ. 1991 Champ และ Rigdon [9] ได้ใช้วิธีสมการเชิงปริพันธ์ของ Fredholm ชนิดที่ 2 ในการหาค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม ในงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาค่า  $ARL$  แสดงได้ดังสมการที่ (6)

$$\begin{aligned} L(u) &= 1 + \frac{1}{\lambda + k} \int_0^b L(y) f\left(\frac{y - (1-\lambda)u + kv}{\lambda + k}\right) \\ &\quad - \eta - \beta t - \gamma t^2 - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} dy \end{aligned} (6)$$

จากสมการที่ (6) ใช้วิธีการสร้างพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสในการประมาณค่าอินทิกรัลสามารถประมาณได้ด้วยสมการที่ (7)

$$\begin{aligned} \tilde{L}(u) &= 1 + \frac{1}{\lambda + k} \sum_{j=1}^n w_j \tilde{L}(a_j) f \\ &\quad \left( \frac{a_j - (1-\lambda)u + kv}{\lambda + k} - \eta - \beta t - \gamma t^2 - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} \right) \\ &\quad , i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} (7)$$



วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations Method; NIE) ที่ใช้ในงานวิจัยนี้มี 4 วิธี ดังนี้

### 2.3.1 วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Quadrature)

จากสมการที่ (7) กำหนดให้

$$f(A_j) = f\left(\frac{a_j - (1-\lambda)u + kv}{(\lambda+k)} - \eta - \beta t - \gamma t^2 - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}\right)$$

การประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขของสมการ  $f(y)$  ในช่วง  $[0, b]$  แสดงดังสมการ

$$\int_0^b W(y)f(y)dy \approx \sum_{j=1}^m w_j f(a_j); j = 1, 2, \dots, m$$

โดยที่  $W(y) = 1, -1 < y < 1$

สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎของเกาส์ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA แสดงได้ดังสมการที่ (8)

$$\tilde{L}_G(u) \approx 1 + \frac{1}{\lambda+k} \sum_{j=1}^m w_j L(a_j) f(A_j) \quad (8)$$

### 2.3.2 วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule)

กำหนดให้  $y = f(y)$  ในช่วง  $[0, b]$  แบ่งออกเป็น  $m$  ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง  $h = \frac{b}{m}$  ด้วยกฎของค่ากลาง ที่มีการแบ่งช่วงเป็น  $m$  ช่วง แสดงดังสมการ

$$M(f, h) = h \sum_{j=1}^m f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h\right); j = 0, 1, 2, \dots, m$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของ  $f(y)$  ในช่วง  $[0, b]$  อยู่ในรูป  $\int_0^b f(y)dy \approx M(f, h)$

สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA แสดงได้ดังสมการที่ (9)

$$\tilde{L}_M(u) \approx 1 + \frac{1}{\lambda+k} \sum_{j=1}^m w_j L(a_j) f(A_j) \quad (9)$$

โดยที่  $a_j = w_j \left(j - \frac{1}{2}\right)$  และ  $w_j = \frac{b}{m}; j = 1, 2, \dots, m$

### 2.3.3 วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

กำหนดให้  $y = f(y)$  ในช่วง  $[0, b]$  แบ่งออกเป็น  $m$  ช่วง

โดยมีช่วงความกว้าง  $h = \frac{b}{m}$  ด้วยกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีการแบ่งช่วงเป็น  $m$  ช่วง เขียนได้ในรูป

$$T(f, h) = \frac{h}{2}(f(a) - f(b)) + h \sum_{j=1}^m f(x_j); j = 0, 1, 2, \dots, m$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของ  $f(y)$  ในช่วง  $[0, b]$  อยู่ในรูป  $\int_0^b f(y)dy \approx T(f, h)$

สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎของสี่เหลี่ยมคางหมูของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA แสดงได้ดังสมการที่ (10)

$$\tilde{L}_T(u) \approx 1 + \frac{1}{\lambda+k} \sum_{j=1}^{m+1} w_j L(a_j) f(A_j) \quad (10)$$

โดยที่  $a_j = w_j j$  และ  $w_j = \frac{b}{m}; j = 1, 2, \dots, m-1$

ในกรณีอื่น  $w_j = \frac{b}{2m}$

### 2.3.4 วิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)

กำหนดให้  $y = f(y)$  ในช่วง  $[0, b]$  แบ่งออกเป็น  $2m$  ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง  $h = \frac{b}{2m}$  ด้วยกฎของซิมป์สัน ที่มีการแบ่งช่วงเป็น  $2m$  ช่วง เขียนได้ในรูป

$$S(f, h) = \frac{h}{3}(f(a) - f(b)) + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^m f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}); k = 0, 1, 2, \dots, m$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของ  $f(y)$  ในช่วง  $[0, b]$  อยู่ในรูป  $\int_0^b f(y)dy \approx S(f, h)$

สามารถเขียนค่าประมาณปริพันธ์เชิงตัวเลขจากกฎของซิมป์สันของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA แสดงได้ดังสมการที่ (11)

$$\tilde{L}_S(u) \approx 1 + \frac{1}{\lambda+k} \sum_{j=1}^{2m+1} w_j L(a_j) f(A_j) \quad (11)$$

โดยที่  $a_j = w_j j, w_j = \frac{4}{3} \left(\frac{b}{2m}\right); j = 1, 3, \dots, 2m-1$

และ  $w_j = \frac{2}{3} \left( \frac{b}{2m} \right); j = 2, 4, \dots, 2m - 2$

ในกรณีอื่น  $w_j = \frac{1}{3} \left( \frac{b}{2m} \right)$

**2.4 ขั้นตอนการจำลองข้อมูล**

2.4.1 กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม กำหนดค่าพารามิเตอร์  $\alpha_0$  เท่ากับ 1

2.4.2 กำหนดค่าพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิที่ทำการศึกษ  $\lambda$  เท่ากับ 0.05 และ 1 ตามลำดับ

2.4.3 กำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ย เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม  $ARL_0$  เท่ากับ 370

2.4.4 กำหนดระดับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ ( $\delta$ ) เท่ากับ 0.001 0.003 0.005 0.01 0.03 0.05 0.1 และ 0.5 ตามลำดับ

2.4.5 หาค่าความยาวรันเฉลี่ยด้วยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี

2.4.6 เปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ย และเวลาที่ใช้ในการประมวลผลที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

ทั้ง 4 วิธี

2.4.7 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA

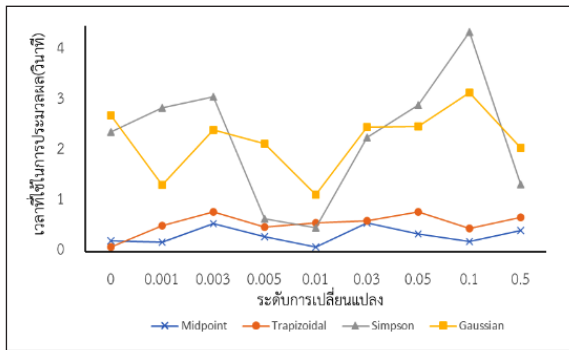
**3. ผลการทดลอง**

การวิจัยนี้ได้ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข สำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลง (Modified EWMA) เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี โดยพิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) กำหนดให้  $ARL_0 = 370$  กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม กำหนดค่าถ่วงน้ำหนักของแผนภูมิควบคุมที่ศึกษา  $\lambda$  เท่ากับ 0.05 และ 0.1 และกำหนดระดับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ ( $\delta$ ) เท่ากับ 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1 และ 0.5 ตามลำดับ นอกจากนี้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA

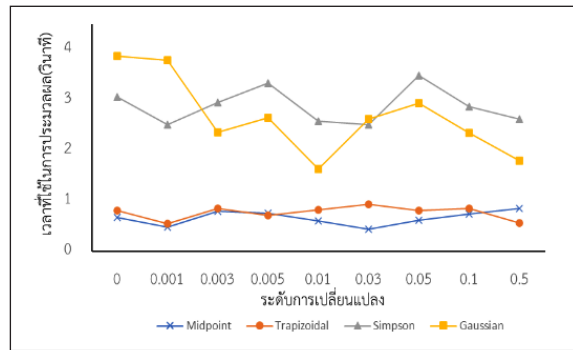
**ตารางที่ 1** การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(1) กำหนดให้  $\eta = 0.1, \beta = 0.5, \gamma = 1.5, \phi_1 = 0.1$  และ  $ARL_0 = 370$

$\lambda$	NIE	$\delta$								
		0	0.001	0.003	0.005	0.01	0.03	0.05	0.1	0.5
0.05	Midpoint	370.387 (0.219)	213.804 (0.188)	116.093 (0.563)	79.829 (0.296)	45.033 (0.094)	16.807 (0.578)	10.567 (0.359)	5.748 (0.203)	1.849 (0.422)
	Trapezoidal	370.387 (0.094)	213.804 (0.515)	116.093 (0.797)	79.829 (0.5)	45.033 (0.578)	16.807 (0.61)	10.567 (0.796)	5.748 (0.469)	1.849 (0.687)
	Simpson	370.387 (2.391)	213.804 (2.86)	116.093 (3.078)	79.829 (0.656)	45.033 (0.484)	10.567 (2.922)	10.567 (2.922)	5.748 (4.375)	1.849 (1.343)
	Gaussian	370.387 (2.719)	213.804 (1.328)	116.093 (2.422)	79.829 (2.156)	45.033 (1.141)	10.567 (2.5)	10.567 (2.5)	5.748 (3.172)	1.849 (2.063)
0.1	Midpoint	370.344 (0.672)	205.543 (0.485)	109.026 (0.797)	74.356 (0.765)	41.649 (0.609)	15.512 (0.438)	9.780 (0.625)	5.364 (0.75)	1.791 (0.86)
	Trapezoidal	370.344 (0.812)	205.543 (0.547)	109.026 (0.859)	74.356 (0.719)	41.649 (0.828)	15.512 (0.937)	9.780 (0.813)	5.364 (0.859)	1.791 (0.562)
	Simpson	370.344 (3.063)	205.543 (2.515)	109.026 (2.953)	74.356 (3.344)	41.649 (2.578)	15.512 (2.516)	9.780 (3.484)	5.364 (2.875)	1.791 (2.625)
	Gaussian	370.344 (0.484)	205.543 (3.797)	109.026 (2.359)	74.356 (2.656)	41.649 (1.641)	15.512 (2.625)	9.780 (2.938)	5.364 (2.344)	1.791 (1.797)

วชิรวิทย์ แก้วสอน และคณะ, “ค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังดัดแปลงสำหรับตัวแบบถดถอยในตัวกำลังสอง.”



$\lambda = 0.05$



$\lambda = 0.1$

รูปที่ 1 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(1) เมื่อ กำหนดให้  $ARL_0=370$

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(3) กำหนดให้  $\eta = 0.1, \beta = 1, \gamma = 0.5, \phi_1 = 0.1, \phi_2 = 0.2, \phi_3 = 0.3$  และ  $ARL_0 = 370$

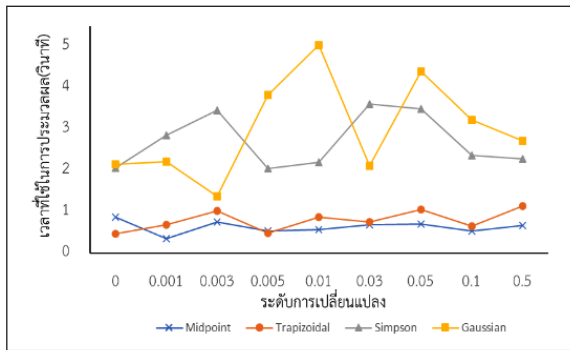
$\lambda$	NIE	$\delta$								
		0	0.001	0.003	0.005	0.01	0.03	0.05	0.1	0.5
0.05	Midpoint	370.576 (1.109)	163.579 (0.485)	77.691 (0.422)	51.186 (0.266)	27.931 (0.625)	10.449 (0.234)	6.736 (0.328)	3.899 (0.125)	1.590 (0.343)
	Trapezoidal	370.576 (1.172)	163.579 (0.515)	77.691 (0.438)	51.186 (0.203)	27.931 (0.421)	10.449 (0.578)	6.736 (0.328)	3.899 (0.156)	1.590 (0.313)
	Simpson	370.576 (2.281)	163.579 (1.954)	77.691 (1.375)	51.186 (1.313)	27.931 (1.875)	10.449 (1.313)	6.736 (1.938)	3.899 (1.547)	1.590 (1.344)
	Gaussian	370.576 (2.172)	163.579 (3.296)	77.691 (1.219)	51.186 (1.531)	27.931 (2.079)	10.449 (1.109)	6.736 (1.156)	3.899 (1.718)	1.590 (1.125)
0.1	Midpoint	370.647 (0.329)	155.357 (0.484)	72.318 (0.359)	47.380 (0.484)	25.758 (0.359)	9.661 (0.328)	6.258 (0.375)	3.663 (0.407)	1.549 (0.203)
	Trapezoidal	370.647 (0.297)	155.357 (0.61)	72.318 (0.359)	47.380 (0.547)	25.758 (0.594)	9.661 (0.343)	6.258 (0.344)	3.663 (0.234)	1.549 (0.406)
	Simpson	370.647 (1.125)	155.357 (1.672)	72.318 (2.61)	47.380 (3.11)	25.758 (1.422)	9.661 (3.735)	6.258 (1.875)	3.663 (1.609)	1.549 (1.469)
	Gaussian	370.647 (1.656)	155.357 (1.203)	72.318 (2.125)	47.380 (2.454)	25.758 (2.516)	9.661 (2.312)	6.258 (2.671)	3.663 (1.672)	1.549 (1.406)

จากตารางที่ 1 เมื่อ  $\lambda = 0.05, b = 0.302801$  และ  $\lambda = 0.1, b = 0.305881$  และตารางที่ 2 เมื่อ  $\lambda = 0.05, b = 0.303195$  และ  $\lambda = 0.1, b = 0.306253$  นำเสนอค่า ARL และเวลาในการประมวลผลที่ได้จากวิธีการสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี พบว่า ในแต่ละระดับการ

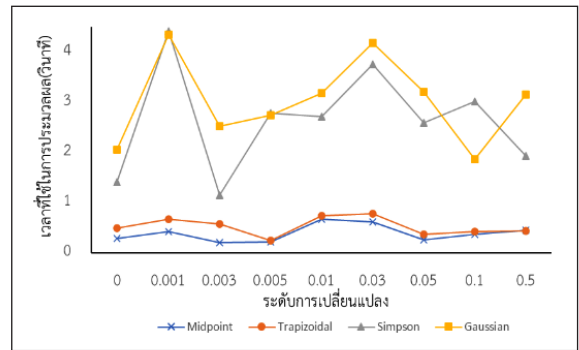
เปลี่ยนแปลงให้ค่า ARL เท่ากัน แต่เมื่อพิจารณาจากความเร็วในการประมวลผล (CPU Times) ต่ำสุด มีสองวิธีคือ วิธีกึ่งกลางและวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูที่ให้ค่าความเร็วในการประมวลผลไม่แตกต่างกัน แสดงดังรูปที่ 1 และรูปที่ 2

วชิรวิทย์ แก้วสอน และคณะ, “ค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังตัดแปลงสำหรับตัวแบบถดถอยในตัวกำลังสอง.”



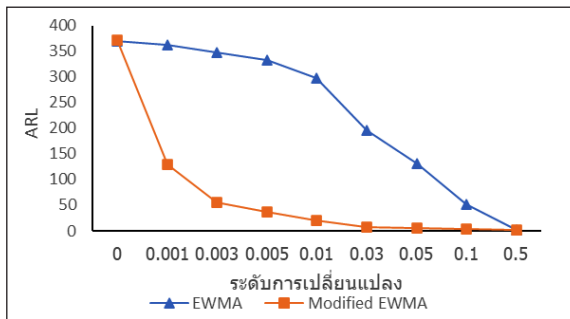


$\lambda = 0.05$

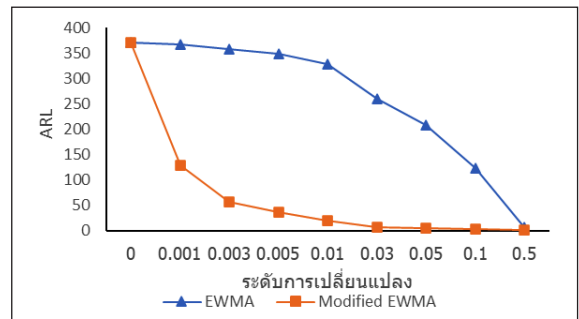


$\lambda = 0.1$

รูปที่ 2 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(3) เมื่อกำหนดให้  $ARL_0 = 370$



$\lambda = 0.05$

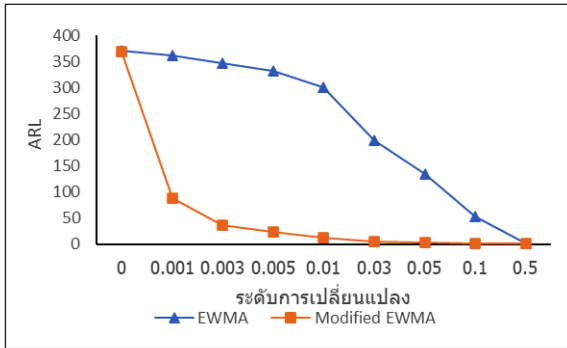


$\lambda = 0.1$

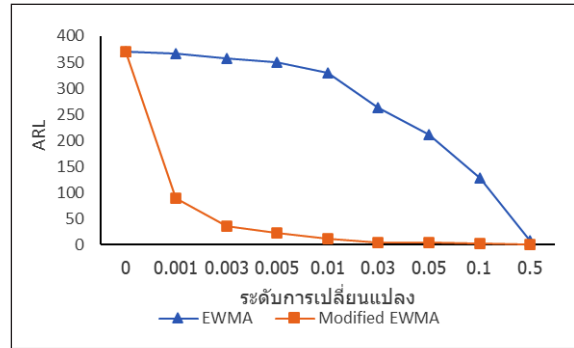
รูปที่ 3 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(1) เมื่อกำหนดให้  $ARL_0=370$

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(1) กำหนดให้  $\eta = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \phi_1 = 0.2$  และ  $ARL_0 = 370$

$\lambda$	$k$	$b$	$\delta$								
			0	0.001	0.003	0.005	0.01	0.03	0.05	0.1	0.5
0.05	1	1.13272	370.901	291.836	204.688	157.685	100.294	41.120	26.045	13.814	3.476
	2	2.2678	370.141	262.070	165.689	121.304	72.909	28.630	18.141	9.838	2.885
	5	5.6735	370.056	240.826	142.124	101.029	58.962	22.755	14.475	7.995	2.589
	10	11.34994	370.277	233.279	134.434	94.661	54.754	21.040	13.410	7.459	2.500
	15	17.02642	370.185	230.638	131.872	92.574	53.396	20.493	13.071	7.288	2.471
0.1	1	1.16616	370.675	287.132	198.022	151.203	95.171	38.668	24.471	13.011	3.348
	2	2.33312	370.118	261.685	165.240	120.909	72.631	28.511	18.068	9.803	2.881
	5	5.83976	370.178	243.356	144.732	103.210	60.422	23.363	14.858	8.194	2.631
	10	11.6864	370.327	236.732	137.868	97.486	56.613	21.802	13.889	7.708	2.552
	15	17.53342	370.101	234.349	135.544	95.583	55.367	21.298	13.577	7.551	2.526



$\lambda = 0.05$



$\lambda = 0.1$

รูปที่ 4 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(3) เมื่อกำหนดให้  $ARL_0=370$

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(3) กำหนดให้  $\eta = 0.1, \beta = 0.5, \gamma = 1.0, \phi_1 = 0.1, \phi_2 = 0.2, \phi_3 = -0.3$  และ  $ARL_0 = 370$

$\lambda$	$k$	$b$	$\delta$								
			0	0.001	0.003	0.005	0.01	0.03	0.05	0.1	0.5
0.05	1	0.555225	370.570	232.459	133.433	93.734	53.985	20.475	12.904	7.011	2.173
	2	1.110943	370.063	193.570	99.472	67.175	37.395	14.058	8.991	5.092	1.888
	5	2.77842	370.761	168.959	81.378	53.872	29.547	11.142	7.219	4.215	1.746
	10	5.55769	370.647	160.598	75.782	49.877	27.250	10.303	6.790	3.962	1.703
	15	8.33698	370.287	157.756	73.958	48.589	26.517	10.036	6.547	3.881	1.689
0.1	1	0.564035	370.231	224.873	126.239	87.926	50.242	18.985	11.987	6.554	2.098
	2	1.12671	370.393	191.316	97.673	65.820	36.577	13.748	8.801	4.996	1.870
	5	2.81735	370.601	169.256	81.597	54.032	29.641	11.178	7.241	4.227	1.748
	10	5.63608	370.197	161.594	76.476	50.376	27.539	10.410	6.775	3.996	1.710
	15	8.455	370.417	159.092	74.817	49.196	26.864	10.164	6.626	3.922	1.698

จากตารางที่ 3 ถึงตารางที่ 4 นำเสนอค่า  $ARL$  ที่ได้จากวิธีกึ่งกลาง เนื่องจากวิธีกึ่งกลางนั้นง่ายต่อการนำไปใช้ และใช้เวลาในการประมวลผลเร็วกว่าวิธีอื่น กำหนดค่าคงที่ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA ( $k$ ) เท่ากับ 1, 2, 5, 10 และ 15 ตามลำดับพบว่า ยิ่งค่าคงที่มีค่ามากขึ้น ค่า  $ARL_1$  จะมีค่าลดลงในทุกะดับการเปลี่ยนแปลง แสดงว่าเมื่อค่าคงที่มีค่ามากขึ้น ประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงจะดีกว่าอย่างเห็นได้ชัด

ตารางที่ 5 ถึงตารางที่ 6 นำเสนอค่า  $ARL$  ที่ได้จากวิธีกึ่งกลาง และเปรียบเทียบค่า  $ARL$  ของแผนภูมิควบคุม

EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA เมื่อกำหนดค่าคงที่  $k = 15$  พบว่า ค่า  $ARL_1$  ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีค่าต่ำกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง แสดงว่าแผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง แสดงดังรูปที่ 3 และ รูปที่ 4

ตารางที่ 7 นำเสนอค่า  $ARL$  ที่ได้จากวิธีกึ่งกลางสำหรับข้อมูลจริง เมื่อค่าสังเกตของข้อมูลจริงเป็นค่าฝุ่นละออง PM2.5 [10] ชุดข้อมูลจริงที่นำมามีการแจกแจง

**ตารางที่ 5** การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(1) กำหนดให้  $\eta = 0.1, \beta = 0.5, \gamma = 1, \phi_1 = 0.7$  และ  $ARL_0 = 370$

$\lambda$	$\delta$	EWMA	Modified EWMA	$\lambda$	$\delta$	EWMA	Modified EWMA
		$b = 1.472 \times 10^{-8}$	$b = 3.03962$			$b = 5.99 \times 10^{-4}$	$b = 3.05506$
0.05	0	370.325	370.619	0.1	0	370.963	370.083
	0.001	362.315	128.484		0.001	366.458	128.589
	0.003	346.855	56.201		0.003	357.639	56.284
	0.005	332.113	36.237		0.005	349.067	36.296
	0.01	298.169	19.516		0.01	328.666	19.550
	0.03	195.790	7.407		0.03	259.857	7.420
	0.05	130.706	4.884		0.05	207.339	4.891
	0.1	50.990	2.966		0.1	122.323	2.970
0.5	1.228	1.407	0.5	7.036	1.408		

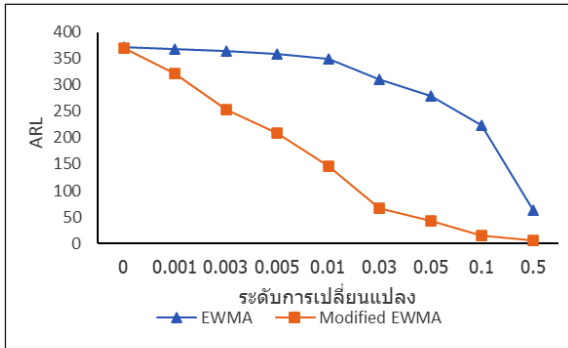
**ตารางที่ 6** การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic Trend AR(3) กำหนดให้  $\eta = 0.1, \beta = 1.0, \gamma = 1.0, \phi_1 = 0.1, \phi_2 = 0.2, \phi_3 = -0.3$  และ  $ARL_0 = 370$

$\lambda$	$\delta$	EWMA	Modified EWMA	$\lambda$	$\delta$	EWMA	Modified EWMA
		$b = 2.82 \times 10^{-8}$	$b = 3.36307$			$b = 1.085 \times 10^{-3}$	$b = 3.382$
0.05	0	370.369	370.195	0.1	0	370.695	370.883
	0.001	362.592	89.148		0.001	366.353	89.371
	0.003	347.569	35.995		0.003	357.847	36.088
	0.005	333.225	22.856		0.005	349.573	22.915
	0.01	300.123	12.304		0.01	329.857	12.335
	0.03	199.537	4.904		0.03	263.061	4.915
	0.05	134.799	3.387		0.05	211.698	3.393
	0.1	54.039	2.238		0.1	127.519	2.241
0.5	1.284	1.297	0.5	8.192	1.297		

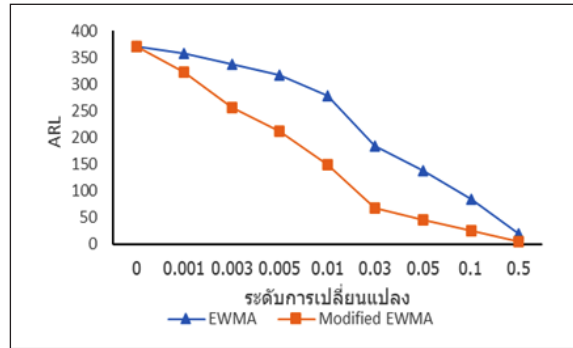
แบบเลขชี้กำลังเกี่ยวกับปริมาณฝุ่น PM2.5 (หน่วย : ไมโครกรัมต่อลูกบาศก์เมตร) ต่อวัน เป็นข้อมูลรายวัน ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2022 ถึง วันที่ 30 พฤศจิกายน 2022 เป็นข้อมูลที่เก็บมาจากมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรมาธิราช ตำบลบางพูด อำเภอปากเกร็ด จังหวัดนนทบุรี แสดงได้ ดังรูปที่ 6

จากการทดสอบด้วยโปรแกรม SPSS25 ได้ค่า พารามิเตอร์ของข้อมูลจริงแสดงดังรูปที่ 7 เป็นดังนี้  $\eta = 0, \beta = 1.679, \gamma = -0.023$  และ  $\phi_1 = 0.738$  ดังนั้นสมการ

ตัวแบบของข้อมูลจริงชุดนี้ คือ  $X_t = 1.679t - 0.023t^2 + 0.738X_{t-1} + \varepsilon_t ; t = 1,2,\dots$  และได้ทำการเปรียบเทียบ ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA เมื่อกำหนดค่าคงที่  $k = 15$  พบว่า ค่า  $ARL_1$  ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีค่า ต่ำกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง แสดงว่าแผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง แสดงดังรูปที่ 5

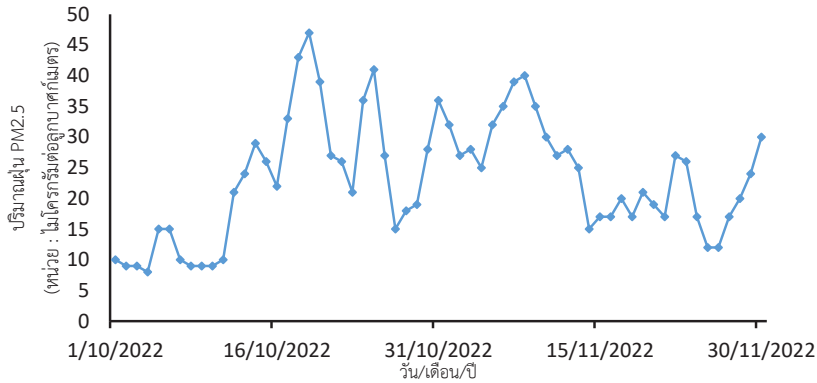


$\lambda = 0.05$



$\lambda = 0.1$

รูปที่ 5 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับข้อมูลจริงที่มีตัวแบบ Quadratic Trend AR(1) เมื่อกำหนดให้  $ARL_0 = 370$



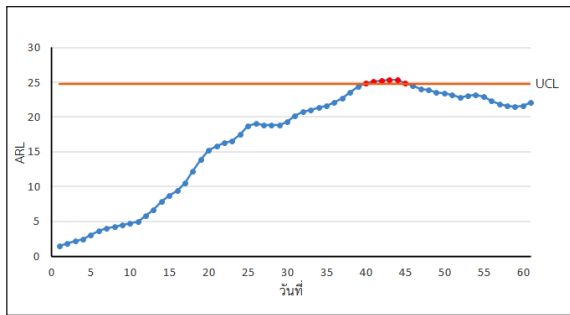
รูปที่ 6 กราฟแสดงข้อมูลจริงของปริมาณฝุ่น PM2.5 ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2022 ถึง วันที่ 30 พฤศจิกายน 2022

ตารางที่ 7 การเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับข้อมูลจริงที่มีตัวแบบ Quadratic Trend AR(1) มีค่าพารามิเตอร์  $\eta = 0, \beta = 1.679, \gamma = -0.023$  และ  $\phi_1 = 0.738$  เมื่อกำหนดให้  $ARL_0 = 370$

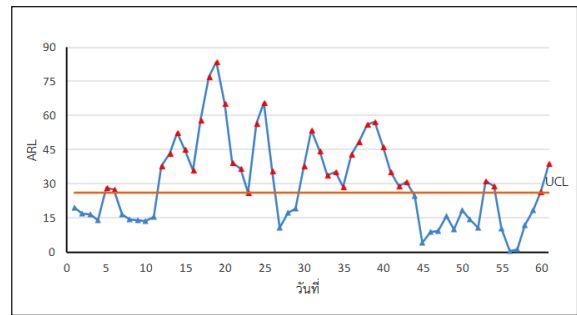
$\lambda$	$\delta$	EWMA	Modified EWMA	$\lambda$	$\delta$	EWMA	Modified EWMA
		$b = 0.17677$	$b = 66.6525$			$b = 0.37322$	$b = 68.2114$
0.05	0	370.745	370.371	0.1	0	370.559	370.351
	0.001	368.410	320.953		0.001	358.593	322.164
	0.003	363.822	253.430		0.003	336.832	255.721
	0.005	359.339	209.456		0.005	317.553	212.073
	0.01	348.566	146.246		0.01	277.777	148.801
	0.03	310.856	66.731		0.03	184.897	68.306
	0.05	280.007	43.540		0.05	138.425	44.638
	0.1	222.944	14.781		0.1	84.787	24.299
	0.5	63.057	5.380	0.5	20.147	5.291	

ARIMA Model Parameters								
					Estimate	SE	t	Sig.
VAR00001-Model_1	VAR00001	No Transformation	AR	Lag 1	.738	.098	7.533	.000
	VAR00002	No Transformation	Numerator	Lag 0	1.679	.303	5.542	.000
	VAR00003	No Transformation	Numerator	Lag 0	-.023	.006	-3.694	.000

รูปที่ 7 โมเดลที่เลือกใช้ ARIMA(1,0,0) และค่าประมาณที่ได้จากโปรแกรม SPSS25



(ก) EWMA



(ข) Modified EWMA

รูปที่ 8 ประสิทธิภาพการตรวจจัดการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยระหว่างแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับข้อมูลจริง

รูปที่ 8 (ก) แสดงค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA พล็อตกับ UCL ที่มีค่าเท่ากับ 24.81 จะเห็นได้ว่าข้อมูลลำดับที่ 40-45 ตกอยู่นอกขีดจำกัดการควบคุมรูปที่ 8 (ข) แสดงค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA พล็อตกับค่า UCL ที่มีค่าเท่ากับ 25.87 จะเห็นได้ว่าข้อมูลลำดับที่ 5 เป็นค่าสังเกตแรกที่ตกอยู่นอกขีดจำกัดการควบคุม สามารถสรุปได้ว่า แผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจัดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA

#### 4. อภิปรายผลและสรุป

จากผลการวิจัยพบว่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับตัวแบบ Quadratic trend AR(p) ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธีมีความยาวรันเฉลี่ยไม่แตกต่างกัน แต่เมื่อพิจารณาจากความเร็วในการประมวลผลพบว่า วิธีกฎค่ากลางและวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมูใช้เวลาในการประมวลผลเร็วที่สุด โดยเวลาที่ใช้นการประมวลผลไม่เกิน

1-2 วินาที ส่วนวิธีกฎเกาส์และวิธีกฎของซิมป์สัน ใช้เวลาในการประมวลผลมากกว่าซึ่งใช้เวลาประมาณ 2-5 วินาที

จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA และ แผนภูมิควบคุม Modified EWMA พบว่า แผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจัดการเปลี่ยนแปลงได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง นอกจากนี้เมื่อค่าคงที่  $k$  ของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีค่ามากขึ้น ประสิทธิภาพในการตรวจจัดการเปลี่ยนแปลงจะเกิดขึ้นได้ไวกว่าอย่างเห็นได้ชัด

การประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้สอดคล้องกับข้อมูลจำลอง คือ แผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจัดการเปลี่ยนแปลงได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาตัวแบบ Quadratic Trend AR(p) สำหรับแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สามารถนำตัวแบบ Quadratic Trend AR(p) ประยุกต์ใช้กับแผนภูมิควบคุมชนิด



อินได้ เช่น แผนภูมิควบคุม Double EWMA และ Triple EWMA เป็นต้น

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] W. A. Shewhart, *Economic control of quality of manufactured product*, Martino Fine Books 2015 Reprint of 1931.
- [2] S. W. Roberts, "Control chart test based on geometric moving average," *Technometrics*, vol. 1, no. 3, pp. 239–250, 1959.
- [3] A. K. Patel and J. Divecha, "Modified exponentially weighted moving average (EWMA) control chart for an analytical process data," *Journal of Chemical Engineering and Materials Science*, vol. 2, no. 1, pp. 12–20, 2011.
- [4] N. Khan, M. Aslam, and C. Jun, "Design of a control chart using a modified EWMA statistic," *Quality and Reliability Engineering International*, vol. 33, pp. 100–114, 2017.
- [5] C. Sangaroonwong, Y. Areepong, and S. Sukparungsee, "Average Run Length by Numerical Integral Equation Approach of Modified EWMA control chart when Observations are from Continuous Distributions," *Global Goals, Local Actions: Looking Back and Moving Forward 2020* (in Thai).
- [6] S. Haider, "Forecasting Dhaka Stock Exchange (DSE) return: An Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) Approach," *North South Business Review*, vol. 3, no 1, July 2009.
- [7] P. Phanthuna, Y. Areepong, and S. Sukparungsee, "Numerical integral equation methods of average run length on modified ewma control chart for exponential AR(1) process," *IMECS 2018*, vol 2, Hong Kong, HK, 2018, pp. 845–847.
- [8] K. Karoon, Y. Areepong, and S. Sukparungsee, "Numerical integral equation methods of average run length on extended ewma control chart for autoregressive process," in *Proceedings of the World Congress on Engineering 2021, WCE 2021*, July 7–9, 2021.
- [9] C. W. Champ and S. E. Rigdon, "A comparison of the Markov chain and the integral equation Approaches for evaluating the run length distribution of quality control charts," *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, vol. 20, no.1, pp. 191–204, 1991.
- [10] Historical data PM2.5. (2022) "Pollution Control Department," 2022. [Online] (in Thai). Available: [http://air4thai.pcd.go.th/webV2/history/pm25\\_2011\\_2020.zip](http://air4thai.pcd.go.th/webV2/history/pm25_2011_2020.zip)