บทความวิจัย

การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน

คมกร ไชยเดชาธร ชาญชัย เงาะปก และ วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา
สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
กรกต เลิศชัยพงศ์ และ วาริน ชุบขุนทด
สาขาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม*
ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 2555 2000 ต่อ 8126 อีเมล: sittisak.j@eng.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2024.08.007
รับเมื่อ 8 มีนาคม 2566 แก้ไขเมื่อ 4 พฤษภาคม 2566 ตอบรับเมื่อ 1 มิถุนายน 2566 เผยแพร่ออนไลน์ 15 สิงหาคม 2567

บทคัดย่อ

บทความนี้ นำเสนอการวิเคราะห์การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน ฟังก์ชันความหนาของโครงสร้างโดมเขียนในเทอมของค่าพารามิเตอร์พื้นผิวพลังงานความเครียด เนื่องจากเมมเบรนและโมเมนต์ดัดถูกนำมาพิจารณาในสมการแปรผันการเขียนฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างโดมรูปทรงกลม อาศัยหลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบาง การคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับชิ้นส่วนคานแบบ C^2 ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรงในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติกับโหมดการสั่นอิสระมีค่าใกล้กับงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีต สำหรับกรณีที่โครงสร้างโดมมีความหนาคงที่ตลอดเส้นโค้งในแนวพิกัดเมอร์เดียน ผลของการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความหนา มุมรองรับส่วนโค้ง และมอดุลัสยืดหยุ่นที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ ภายใต้การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ได้ถูกนำเสนอในบทความนี้

คำสำคัญ: การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ โครงสร้างโดมรูปทรงกลม ความหนาแปรเปลี่ยน ฟังก์ชันพลังงาน วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น

การอ้างอิงบทความ: คมกร ไชยเดชาธร, ชาญชัย เงาะปก, วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา, กรกต เลิศชัยพงศ์, วาริน ชุบขุนทด และ สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม, "การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 35, ฉบับที่ 1, หน้า 1–15, เลขที่บทความ 251-116811, ม.ค.–มี.ค. 2568.

Research Article

Large Amplitude Free Vibration of Spherical Dome Structures with Variable Thickness

Komkorn Chaidachatorn, Chanchai Ngohpok and Weeraphan Jiammeepreecha
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima, Thailand
Korakot Lerdchaipong and Warin Chupkhunthod
Department of Survey Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima, Thailand
Sittisak Jamnam*
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0 2555 2000 Ext. 8126, E–mail: sittisak.j@eng.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2024.08.007
Received 8 March 2023; Revised 4 May 2023; Accepted 1 June 2023; Published online: 15 August 2024

Abstract

Large amplitude free vibration of a spherical dome with variable thickness is presented in this paper. The thickness function of the spherical dome is written in terms of surface parameters. Strain energies due to membrane and flexural rigidities are considered in the variational formulation. The energy functional of the spherical dome system is written in terms of the shell displacements based on the principle of virtual work. Natural frequencies and corresponding mode shapes for large amplitude free vibration are obtained by nonlinear finite element method via C^2 beam elements, and a direct iterative procedure is used in this study. The validation of the present formulation is found to be in close agreement with those in existing literature for a spherical dome with thickness constant along the meridian curve. Finally, the parametric study on the thickness ratios, central angles, and elastic modulus on the large amplitude free vibration of a spherical dome with variable thickness is reported in this paper.

Keywords: Large Amplitude Free Vibration, Spherical Dome, Variable Thickness, Energy Functional, Nonlinear Finite Element Method

Please cite this article as: K. Chaidachatorn, C. Ngohpok, W. Jiammeepreecha, K. Lerdchaipong,W. Chupkhunthod, and S. Jamnam, "Large amplitude free vibration of spherical dome structures with variable thickness," *The Journal of KMUTNB*, vol. 35, no. 1, pp. 1–15, ID. 251-116811, Jan.–Mar. 2025 (in Thai).

1. บทนำ

โครงสร้างเปลือกบางหรือโครงสร้างโดมรูปทรงกลมในงานวิศวกรรมโยธา สามารถวิเคราะห์เป็นปัญหาแบบสมมาตรรอบแกนหมุน (Axisymmetric Problem) ได้ ในงานวิจัยของ Kunieda [1] Yasuzawa [2] Wang และคณะ [3] วีรพันธุ์ และคณะ [4] และ วีรพันธุ์ และคณะ [5] แต่การวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างเปลือกบางหรือโครงสร้างโดม จะไม่สามารถทำการพิจารณาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ (Static Response) เพียงอย่างเดียว ในทางปฏิบัติวิศวกรโยธา จำเป็นจะต้องพิจารณาผลตอบสนองทางด้านพลศาสตร์ (Dynamic Response) ของโครงสร้าง เนื่องจากแรงกระทำแผ่นดินไหว แรงลม หรือแรงอื่น ๆ ซึ่งแรงกระทำแบบพลศาสตร์เหล่านี้ เป็นสาเหตุหลักที่ทำให้โครงสร้างเกิดความเสียหาย โดยเฉพาะในกรณีที่ค่าความถี่ธรรมชาติ ของโครงสร้างมีค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ของแรงกระทำจากภายนอก ทำให้โครงสร้างเกิดปัญหาการสั่นพ้อง (Resonance Problem) ทำให้เกิดความเสียหายอย่างมากต่อโครงสร้าง และอาจส่งผลกระทบถึงปัญหาด้านสิ่งแวดล้อมตามมาอีกด้วย ดังแสดงในงานวิจัยของ Kunieda [6] และ Leissa [7] เป็นต้น พบว่า ยังเป็นการศึกษาเฉพาะปัญหาการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดเล็ก (Small Amplitude) ต่อมา Gautham และ Ganesan [8] ได้นำเสนอการสั่นอิสระของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมแบบตื้น ที่ทำมาจากวัสดุที่มีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropic Material) และวัสดุเชิงประกอบ (Laminate Material) โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) และรวมผลของการเสียรูป เนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง (First-order Shear Deformation Theory; FSDT) ต่อมา Artioli และ Viola [9] ได้รายงานผลการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมโดยวิธี Generalized Differential Quadrature (GQD) จากนั้น Lee [10] ได้นำเสนอวิธี Pseudospectral ในการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างโดมรูปทรงกลม เช่นกัน ในขณะที่การวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมแบบเต็มใบ ได้ถูกนำเสนอในงานวิจัยของ Duffey และคณะ [11] โดยทำการศึกษาโหมดการสั่นอิสระของโครงสร้างโดมแบบเต็มใบ และเปรียบเทียบกับสมการของ Wilkinson [12] พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติแบบสมมาตรตามแนวแกนในแถบล่างและบน (Lower and Upper Branches) มีค่าสอดคล้องกัน ในปี 2017 ได้มีการนำเสนอสมการสำหรับการวิเคราะห์ เพื่อแก้ปัญหาสมการอนุพันธ์ของการสั่นอิสระของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีสมมติฐานบนความสัมพันธ์ของ Love-Kirchoff และ Donnell-Mushtari-Vaslov ในงานวิจัยของ Bryan [13] สำหรับการวิเคราะห์การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ ได้เริ่มมีการศึกษาในงานวิจัยของ Varadan และ Pandalai [14], Sinharay และ Banerjee [15] และ Sathyamoorthy [16] แต่เป็นกรณีที่ความหนาของโครงสร้างมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง ตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน นอกจากนี้ ยังมีงานวิจัยของ วีรพันธุ์ และ สมชาย [17] ได้ทำการศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติ และโหมดการสั่นอิสระของโครงสร้างโดมบรรจุของเหลวภายในโดยพิจารณาเฉพาะผลของเมมเบรนเพียงอย่างเดียว จากนั้น วีรพันธุ์ และ สมชาย [18] ได้ทำการศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนขนาดของมุมรองรับส่วนโค้ง ที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างโดมบรรจุของเหลว

จากงานวิจัยที่ผ่านมา สำหรับโครงสร้างโดมพบว่า การพิจารณาผลการเปลี่ยนแปลงความหนาตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ และโหมดการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมมีน้อยมาก ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเป็นการพัฒนาแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนในงานวิศวกรรมโยธาโดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [19], [20] พลังงานความเครียด เนื่องจากเมมเบรนและโมเมนต์ดัด เขียนได้ในรูปแบบของสมการแปรผัน (Variational Formulation) การเขียนฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างโดมรูปทรงกลมอาศัยหลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบาง [21], [22] การคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ ของ

โครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนได้ ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น สำหรับชิ้นส่วนคานแบบ C^2 ที่นิยามด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับห้า (Fifth Polynomial Shape Function) [23], [24] ในการจำลองชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างโดม ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรงในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระ เนื่องจากชิ้นส่วนดังกล่าวมีความต่อเนื่องจนถึงอนุพันธ์อันดับที่สอง สามารถนิยามความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนและโมเมนต์ดัดได้ ในขณะที่ชิ้นส่วนแบบ C^1 ที่นิยามด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับสาม (Cubic Polynomial Shape Function) [20], [22] ไม่สามารถจำลองชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบาง ที่มีผลของความเครียดเนื่องจากโมเมนต์ดัดได้

2. วิธีการวิจัย

วิธีการวิจัยในบทความนี้ จะประกอบไปด้วยสมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ แบบจำลองโครงสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับการเสียรูป พลังงานความเครียด เนื่องจากผลของเมมเบรนและโมเมนต์ดัดของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนงานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อย ผลรวมของงานเสมือน และสุดท้ายการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นดังต่อไปนี้

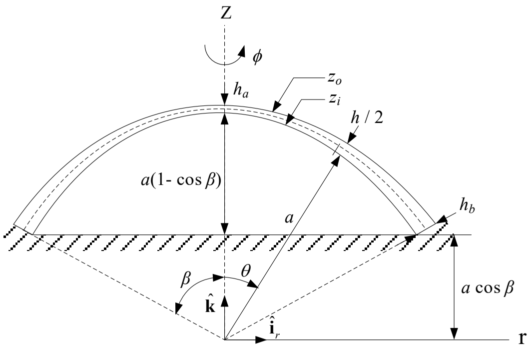
2.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

2.1.1 วัสดุของโครงสร้างโดมมีสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linearly Elastic Material)

2.1.2 ความหนาของโครงสร้างโดมเปลี่ยนแปลงตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนเท่านั้น และมีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการสั่น

2.2 พารามิเตอร์ของพื้นผิวโครงสร้างโดม

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะมีค่าพารามิเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างโดมรูปทรงกลม

กำหนดให้ $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศทางตามแนวแกนในระบบพิกัดฉาก (X,Y,Z) ตามลำดับ ดังนั้น เวกเตอร์ระบุตำแหน่ง (Position Vector) ของพื้นผิวโครงสร้างโดมรูปทรงกลม สามารถนิยามได้จากสมการที่ (1)

$$\mathbf{R}(\theta,\phi) = a\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + a\sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} + a\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

เมื่อ a คือ ความยาวรัศมีของโครงสร้างโดมรูปทรงกลม และ (θ,ϕ) คือ ค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิวที่วัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและลองจิจูด ตามลำดับ โดยที่ความหนาของโครงสร้างโดมมีค่าเปลี่ยนแปลง ตามแนวพิกัดเส้นเมอร์ริเดียน ดังสมการที่ (2)

$$h(\theta) = h_a + (h_b - h_a)(\theta/\beta) \tag{2}$$

เมื่อ β คือ ค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง และ (h_a,h_b) คือ ความหนาที่ตำแหน่งจุดยอด (Apex) และที่ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support) ตามลำดับ เมื่อโครงสร้างโดมเกิดการสั่นภายใต้แรงกระทำแบบพลศาสตร์ (Dynamic Loading) ส่งผลทำให้พื้นผิว S_r เคลื่อนที่ไปยังพื้นผิว S_d ดังนั้น ค่าเวกเตอร์ระบุตำแหน่งที่พื้นผิว S_d จะมีค่า ดังสมการที่ (3)

$$\mathbf{R}^*(\theta,\phi,t) = \mathbf{R}(\theta,\phi) + \mathbf{q}(\theta,\phi,t) \tag{3}$$

เมื่อ $q(\theta, \phi, t)$ คือ เวกเตอร์การเสียรูป (Displacement Vector) จากพื้นผิว S_r ไปยังพื้นผิว S_d ซึ่งสัมพันธ์กับระยะเวลา t ดังนั้น เวกเตอร์การเสียรูป จะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (4)

$$\mathbf{q}(\theta,\phi,t)=\left(\frac{\mathbf{R}_\theta}{A}\right)u+\left(\frac{\mathbf{R}_\phi}{B}\right)v+\left(\frac{\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}_\phi}{AB}\right)w \quad (4)$$

ในที่นี้ตัวห้อย $(\theta,\ \phi)$ แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างโดม และ (u,v,w) คือ องค์ประกอบของระยะการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัส เส้นลองจิจูด และแนวเส้นตั้งฉาก ตามลำดับ ดังนั้นค่าความเร็วและค่าความเร่งของโครงสร้างโดมรูปทรงกลม สามารถคำนวณได้โดยการอนุพันธ์สมการที่ (4) เทียบกับเวลา (t) ดังสมการที่ (5)–(6)

$$\mathbf{V}(\theta,\phi,t)=\left(\frac{\mathbf{R}_\theta}{A}\right)\dot{u}+\left(\frac{\mathbf{R}_\phi}{B}\right)\dot{v}+\left(\frac{\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}_\phi}{AB}\right)\dot{w} \quad (5)$$

$$\mathbf{a}(\theta,\phi,t)=\left(\frac{\mathbf{R}_\theta}{A}\right)\ddot{u}+\left(\frac{\mathbf{R}_\phi}{B}\right)\ddot{v}+\left(\frac{\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}_\phi}{AB}\right)\ddot{w} \quad (6)$$

เนื่องจากเป็นการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Vibration) ดังนั้นค่า $(v,\dot{v},\ddot{v})$ ในสมการที่ (4)–(6) จะมีค่าเป็นศูนย์ จากหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) [19], [20] สามารถคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ (A,B) ได้ดังสมการที่ (7) – (8)

$$A=\sqrt{\mathbf{R}_\theta\cdot\mathbf{R}_\theta}=a \quad (7)$$

$$B=\sqrt{\mathbf{R}_\phi\cdot\mathbf{R}_\phi}=a\sin\theta \quad (8)$$

ในกรณีที่เป็นการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Vibration) สามารถคำนวณค่าความโค้งหลัก (Principal Curvatures) ได้ดังสมการที่ (9)–(10)

$$\kappa_1=\frac{L}{A^2} \quad (9)$$

$$\kappa_2=\frac{N}{B^2} \quad (10)$$

เมื่อค่าพารามิเตอร์ (L,N) สามารถนิยามได้ด้วยสมการที่ (11) – (12)

$$L=\mathbf{R}_{\theta\theta}\cdot\frac{\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}_\phi}{\left|\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}_\phi\right|} \quad (11)$$

$$N=\mathbf{R}_{\phi\phi}\cdot\frac{\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}_\phi}{\left|\mathbf{R}_\theta\times\mathbf{R}_\phi\right|} \quad (12)$$

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูป

ความสัมพันธ์ของความเครียดกับระยะการเสียรูปตามนิยามความเครียดแบบลากรองจ์ (Lagrangian Strains) [25] สามารถนิยามได้ในรูปแบบดัชนี (Index Form) ดังสมการที่ (13)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i=\lfloor\mathbf{L}_i\rfloor\{\mathbf{g}\}+\frac{1}{2}\{\mathbf{g}\}^T[\mathbf{H}_i]\{\mathbf{g}\} \quad (13)$$

กำหนดให้ $\{\mathbf{g}\}^T=\lfloor u\ \ w\ \ u_\theta\ \ w_\theta\ \ u_{\theta\theta}\ \ w_{\theta\theta}\rfloor$ ดังนั้นเวกเตอร์ความเครียด $\lfloor\mathbf{L}_i\rfloor$ และ เมตริกซ์ความเครียด $[\mathbf{H}_i]$ สามารถนิยาม ได้ดังสมการที่ (14)–(17)

$$\{\mathbf{L_1}\}^T=\left\lfloor 0\quad -\frac{L}{A^2}\quad \frac{1}{A}\quad 0\quad 0\quad 0\right\rfloor \quad (14)$$

$$\{\mathbf{L_2}\}^T=\left\lfloor \frac{B_\theta}{AB}\quad -\frac{N}{B^2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\right\rfloor \quad (15)$$

$$[\mathbf{H_1}]=\frac{1}{A^2}\begin{bmatrix}\left(\frac{L}{A}\right)^2 & 0 & 0 & \frac{L}{A} & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{L}{A}\right)^2 & -\frac{L}{A} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{L}{A} & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{L}{A} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[H_2]=\frac{1}{B^2}\begin{bmatrix}\left(\frac{B_\theta}{A}\right)^2 & -\frac{B_\theta N}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{B_\theta N}{AB} & \left(\frac{N}{B}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (17)$$

ในที่นี้ $A_\theta = 0$ และ $B_\theta = acos\theta$ ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (7) และ (8) ตามลำดับ สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่าความโค้งของพื้นผิวที่กึ่งกลางความหนาของโครงสร้างโดมเนื่องจากผลของโมเมนต์ดัด จะมีค่าดังสมการที่ (18)

$$\kappa_i=\lfloor S_i \rfloor\{g\} \quad (18)$$

เมื่อ $\lfloor S_i \rfloor$ คือ เวกเตอร์ค่าความโค้งหลัก มีค่าดังสมการที่ (19) – (20)

$$\{S_1\}^T=\left\lfloor 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{A_x}{A^3} \quad 0 \quad -\frac{1}{A^2}\right\rfloor \quad (19)$$

$$\{S_2\}^T=\left\lfloor 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{B_x}{A^2B} \quad 0 \quad 0\right\rfloor \quad (20)$$

2.4 พลังงานความเครียดของโครงสร้างโดม

ค่าพลังงานความเครียดของโครงสร้างโดม จะแบ่งออกเป็น 2 เทอม คือ ผลของเมมเบรน (Membrane) และโมเมนต์ดัด (Bending) สำหรับโครงสร้างโดมที่มีสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นทั่วไป จะคำนวณค่าความเครียดเนื่องจากเมมเบรนได้ดังสมการที่ (21)

$$U_m=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\{\varepsilon\}^T\left[C'\right]\{\varepsilon\}\,ABd\phi d\theta \quad (21)$$

เมื่อ $\left[C'\right]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการยืดหดตัว (Extensional Rigidity) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (22)

$$\left[C'\right]=\frac{E'h(\theta)}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu\\ \mu & 1\end{bmatrix} \quad (22)$$

เมื่อ $h(\theta)$ คือ ความหนาของโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน, E' คือ มอดุลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus) และ μ คือ อัตราส่วนปัวซง (Poisson's Ratio) สมการที่ (21) สามารถจัดรูปใหม่ในเทอมของค่าการแปรผัน ได้ดังสมการที่ (23)

$$\delta U_m=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\delta\{g\}^T\left([k_m]+[n_{1m}]+[n_{2m}]\right)\{g\}d\theta \quad (23)$$

เมื่อ $[k_m]$, $[n_{1m}]$ และ $[n_{2m}]$ สามารถนิยามได้จากสมการที่ (24)–(26)

$$[k_m]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C'_{ij}\left(\{L_i\}\{L_j\}^T\right) \quad (24)$$

$$[n_{1m}]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C'_{ij}\begin{bmatrix}\left(\{L_i\}\{g\}^T\right)[H_j]\\ +\left(\{g\}^T\{L_i\}\right)[H_j]\\ +[H_i]\left(\{g\}\{L_j\}^T\right)\end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[n_{2m}]=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C'_{ij}\begin{bmatrix}[H_i]\left(\{g\}\{g\}^T\right)[H_j]\\ +\frac{1}{2}\left(\{g\}^T[H_j]\{g\}\right)[H_i]\end{bmatrix} \quad (26)$$

สำหรับค่าความเครียดเนื่องจากโมเมนต์ดัด ของโครงสร้างโดมที่มีสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นทั่วไป จะคำนวณได้ดังสมการที่ (27)

$$U_b=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\{\kappa\}^T\left[D'\right]\{\kappa\}\,ABd\phi d\theta \quad (27)$$

เมื่อ $[D']$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการดัด (Flexural Rigidity) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (28)

$$\left[D'\right]=\frac{E'h^3(\theta)}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}1 & \mu\\ \mu & 1\end{bmatrix} \quad (28)$$

สมการที่ (27) สามารถจัดรูปใหม่ในเทอมของค่าการแปรผันได้ดังสมการที่ (29)

$$\delta U_b = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{g\}^T [k_b] \{g\} d\theta \qquad (29)$$

เมื่อ $[k_b]$ สามารถนิยามได้จากสมการที่ (30)

$$[k_b] = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} D'_{ij} \left(\{S_i\} \{S_j\}^T \right) \qquad (30)$$

2.5 งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างโดม

งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างโดมจะคำนวณได้จากสมการที่ (31)

$$\delta I = -2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\rho_s \ddot{u} \{\delta u\} + \rho_s \ddot{w} \{\delta w\} \right) h(\theta) AB d\theta \quad (31)$$

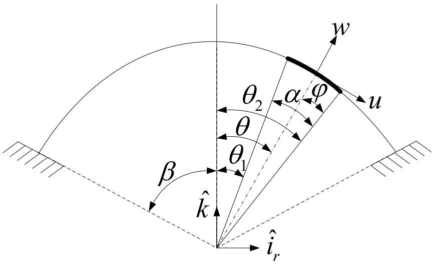
เมื่อ ρ_s คือ ความหนาแน่นของวัสดุโครงสร้างโดม และ $(\ddot{u}, \ddot{w})$ คือ เวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้างตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน และแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ เนื่องจากอัตราส่วนความหนาต่อความยาวรัศมีของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าไม่เกิน 1/20 ดังนั้น การเสียรูปจากเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Deformation) และความเฉื่อยเชิงหมุน (Rotary Inertia) จะไม่นำมาพิจารณาในการคิดงานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้าง ส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางที่ได้จากงานวิจัยนี้มีค่าสูงกว่ากรณีที่คิดผลของการเสียรูปจากเนื่องจากแรงเฉือนและความเฉื่อยเชิงหมุน [26]

2.6 ผลรวมของงานเสมือน

การคำนวณหาผลตอบสนองค่าความถี่ธรรมชาติ และโหมดการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนได้จากผลรวมของงานเสมือน [21] ดังสมการที่ (32)

$$\delta \pi = \delta U_m + \delta U_b - \delta I \qquad (32)$$

แทนค่าจากสมการที่ (23) (29) และ (31) ลงในสมการที่ (32) จะได้ดังสมการที่ (33)



รูปที่ 2 ชิ้นส่วนย่อยทั่วไปและระยะพิกัดของโครงสร้าง

$$\begin{aligned} \delta \pi = & 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{g\}^T \left([k_m] + [n_{1m}] + [n_{2m}] \right) \{g\} d\theta \\ & + 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{g\}^T [k_b] \{g\} d\theta \\ & + 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\{\delta u\} \rho_s \ddot{u} + \{\delta w\} \rho_s \ddot{w} \right) h\, AB d\theta \quad (33) \end{aligned}$$

2.7 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากผลรวมของงานเสมือนของระบบโครงสร้างโดมดังแสดงในสมการที่ (33) จะพบว่า ไม่สามารถคำนวณหาผลเฉลยแบบแม่นตรงได้ เนื่องจากสมการดังกล่าวประกอบไปด้วยเทอมไร้มิติค่อนข้างสูง ดังนั้น จึงจำเป็นต้องอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น [23]–[24] ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข โดยการแบ่งชิ้นส่วนของโครงสร้างโดมตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน ดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งจะได้ค่าประมาณการเสียรูป ดังสมการที่ (34)

$$\{g\} = [\psi] \{\mathrm{d}\} \qquad (34)$$

เมื่อ $\{g\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ $\{d\}$ คือ เวกเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ และ $[\psi]$ คือ เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (35)

$$[\psi] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \ldots & N_6 \\ N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & \ldots & N_{6,\varphi} \\ N_{1,\varphi\varphi} & 0 & N_{2,\varphi\varphi} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_{1,\varphi\varphi} & 0 & N_{2,\varphi\varphi} & \ldots & N_{6,\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (35)$$

ในที่นี้ฟังก์ชันรูปร่างฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่ห้า มีค่าดังสมการที่ (36)–(41)

$$N_1 = 1 - 10\frac{\varphi^3}{\alpha^3} + 15\frac{\varphi^4}{\alpha^4} - 6\frac{\varphi^5}{\alpha^5} \tag{36}$$

$$N_2 = \varphi - 6\frac{\varphi^3}{\alpha^2} + 8\frac{\varphi^4}{\alpha^3} - 3\frac{\varphi^5}{\alpha^4} \tag{37}$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{3}{2}\frac{\varphi^3}{\alpha} + \frac{3}{2}\frac{\varphi^4}{\alpha^2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi^5}{\alpha^3} \tag{38}$$

$$N_4 = 10\frac{\varphi^3}{\alpha^3} - 15\frac{\varphi^4}{\alpha^4} + 6\frac{\varphi^5}{\alpha^5} \tag{39}$$

$$N_5 = -4\frac{\varphi^3}{\alpha^2} + 7\frac{\varphi^4}{\alpha^3} - 3\frac{\varphi^5}{\alpha^4} \tag{40}$$

$$N_6 = \frac{1}{2}\frac{\varphi^3}{\alpha} - \frac{\varphi^4}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{\varphi^5}{\alpha^3} \tag{41}$$

จากหลักการของงานเสมือน [21] แทนค่าสมการที่ (34) และ (35) ลงไปในสมการที่ (33) จะสามารถเขียนในรูปของสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างโดม ได้ดังสมการที่ (42)

$$[m]\{\ddot{d}\} + ([k_L] + [k_{NL}])\{d\} = \{0\} \tag{42}$$

เมื่อ $[m]$, $[k_L]$ และ $[k_N]$ คือ เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสแบบเป็นเชิงเส้น และแบบไม่เป็นเชิงเส้น ในชิ้นส่วนย่อย ตามลำดับ ซึ่งมีค่าดังสมการที่ (43)–(45)

$$\begin{aligned}[m] &= 2\pi\{\delta u\}^T \int_{x_1}^{x_2} \{\psi_u\}\rho_s\{\psi_u\}^T h\,AB\,d\theta \\ &\quad + 2\pi\{\delta w\}^T \int_{x_1}^{x_2} \{\psi_w\}\rho_s\{\psi_w\}^T hAB\,d\theta\end{aligned} \tag{43}$$

$$[k_L] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T ([k_m] + [k_b]) [\psi]\, d\theta \tag{44}$$

$$[k_N] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T ([n_{1m}] + [n_{2m}]) [\psi]\, d\theta \tag{45}$$

ในที่นี้จะเห็นได้ว่าดีกรีอิสระของเอลิเมนต์ (Element Degree of Freedom) $\{d\}$ เหมือนกับดีกรีอิสระรวม (Global Degree of Freedom) $\{\mathbf{Q}\}$ ดังนั้น ผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างโดมสามารถรวมได้โดยตรง โดยใช้สมการที่ (42) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{Q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{46}$$

เมื่อ $[\mathbf{M}]$ คือ เมตริกซ์มวลของโครงสร้าง $[\mathbf{K}]$ คือ ผลรวมของเมตริกซ์สติฟเนสแบบเป็นเชิงเส้น และแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้าง $\{\mathbf{Q}\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ของโครงสร้าง และ $\{\ddot{\mathbf{Q}}\}$ คือ เวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้าง จากหลักการของ Prathap และ Varadan [27] การแก้ปัญหาสมการของการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลา จะสามารถทำได้โดยการลดรูปให้เป็นปัญหาค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Eigenvalue Problem) โดยการนิยามสมบัติของฟังก์ชันที่มีค่าขึ้นอยู่กับเวลาที่จุดวกกลับ (Reversal Point) ของการเคลื่อนที่ ดังสมการที่ (47)

$$\{\ddot{\mathbf{Q}}\}_{\max} = -\omega_n^2 \{\mathbf{Q}\}_{\max} \tag{47}$$

เมื่อ ω_n คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ของโครงสร้างโดม กำหนดให้ $\{\mathbf{Q}\}_{\max}$ มีค่าดังสมการที่ (48)

$$\{\mathbf{Q}\}_{\max} = a_p\{\Lambda\} \tag{48}$$

เมื่อ a_p คือ ค่าแอมพลิจูด (Amplitude) ของตำแหน่งที่สนใจ และ $\{\Lambda\}$ คือ ค่าโหมดการสั่นที่ทำการปรับขนาด (Normalized Mode Shape) ด้วยสมาชิกที่ตำแหน่งอ้างอิง แทนค่าสมการที่ (48) ลงไปในสมการที่ (46) จะได้ว่าเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังสมการที่ (49)

$$([\mathbf{K}] - \omega_n^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{Q}\}_{\max} = \{\mathbf{0}\} \tag{49}$$

ตำแหน่งอ้างอิงที่นำมาใช้ในการพิจารณาการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมนั้น จะเป็นตำแหน่งที่เปลี่ยนไปตามสภาวะการเคลื่อนที่ โดยที่ตำแหน่ง

อ้างอิงจะเป็นตำแหน่งสูงสุดของการเคลื่อนที่ของโครงสร้างโดม ณ สภาวะที่ทำการศึกษาขณะนั้น เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีความสมมาตร ตามแนวแกน (Axisymmetric Free Vibration) ดังนั้น เงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งบนสุดของโครงสร้างโดม จะมีค่าดังสมการที่ (50)

$$u = w_\theta = 0 \tag{50}$$

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะพิจารณาเป็นแบบยึดแน่นอย่างสมบูรณ์ (Fixed Support Condition) โดยกำหนดให้มีค่าดังสมการที่ (51)

$$u = w = w_\theta = 0 \tag{51}$$

2.8 กระบวนการทำซ้ำโดยตรง

ขั้นตอนการวิเคราะห์การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดม มีขั้นตอนดังนี้

2.8.1 คำนวณเมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสแบบเป็นเชิงเส้นในชิ้นส่วนย่อย โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2.8.2 คำนวณเมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติฟเนสแบบเป็นเชิงเส้นของโครงสร้าง โดยการรวมผลของเมตริกซ์ชิ้นส่วนย่อย

2.8.3 คำนวณค่าความถี่ธรรมชาติจากสมการค่าเจาะจงแบบเป็นเชิงเส้น (Linear Eigenvalue Equation)

2.8.4 ทำการปรับขนาดโหมดการสั่น (Normalized Mode Shape) และ คูณด้วยอัตราส่วนแอมพลิจูด (Amplitude Ratio)

2.8.5 คำนวณเมตริกซ์สติฟเนสแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้าง และรวมผลของเมตริกซ์ชิ้นส่วนย่อย ได้แก่ เมตริกซ์มวล เมตริกซ์สติฟเนสแบบเป็นเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้าง จากนั้นทำการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติจากสมการค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Eigenvalue Equation) ใหม่ ตามกระบวนการทำซ้ำโดยตรง จนกระทั่งผลต่างของคำตอบในแต่ละรอบการคำนวณมีค่าน้อยกว่า 10^{-5}

3. ผลการทดลอง

การศึกษาพฤติกรรม การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยใช้หลักการของงานเสมือน และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรงในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้น ในการศึกษาครั้งนี้จะใช้ค่าพารามิเตอร์และสมบัติของโครงสร้างโดม ดังแสดงในตารางที่ 1 ซึ่งจำเป็นต้องทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยเริ่มต้นจากการทดสอบผลการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ เพื่อตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบเชิงตัวเลขเนื่องจากผลของจำนวนเอลิเมนต์ ดังแสดงในตารางที่ 2 จากผลการศึกษาจะพบว่า การแบ่งจำนวนชิ้นส่วนออกเป็น 24 ชิ้นส่วน จะให้คำตอบที่มีความถูกต้องสูงถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3 สำหรับค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดที่ m = 1 ถึง m = 10 เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการแบ่งชิ้นส่วนย่อยที่ละเอียดสูงกว่านี้ ดังนั้น งานวิจัยในบทความนี้จึงเลือกใช้จำนวนชิ้นส่วนเท่ากับ 24 ชิ้นส่วน เท่านั้น

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมี (a)	5 เมตร
ความหนาที่จุดยอด (h_a)	0.05 เมตร
ความหนาที่ฐานรองรับ (h_b)	0.15 เมตร
มุมที่รองรับส่วนโค้ง (β)	90 องศา
ความหนาแน่นของวัสดุ (ρ_s)	7,850 กก/ม^3
มอดุลัสยืดหยุ่น (E')	204×10^3 เมกะปาสคาล
อัตราส่วนปัวซง (μ)	0.3

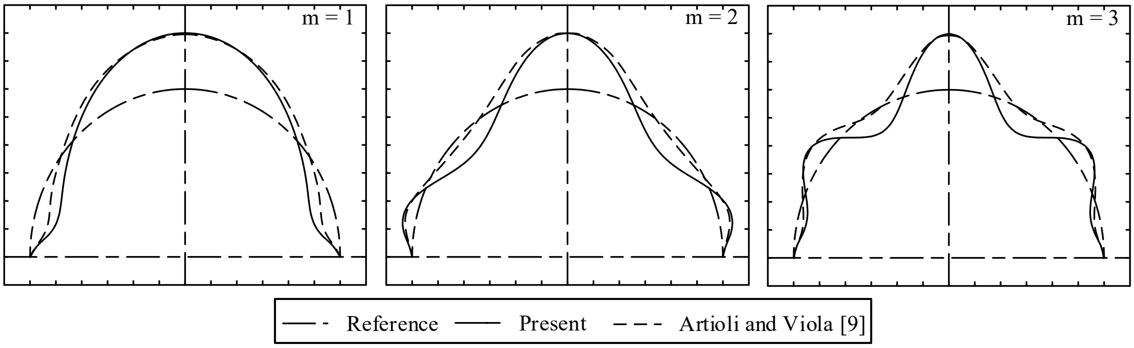
หลังจากนั้นทำการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมสำหรับกรณีที่มีความหนาคงที่ตลอดแนวเส้นเมอร์ริเดียนกับค่าความถี่ธรรมชาติแบบเป็นเชิงเส้น (Ω_L) ที่ได้จากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีต [6] [9] [10] [28] พบว่า คำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกันมาก และเมื่อทำการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติด้วยแอมพลิจูด

ตารางที่ 2 การลู่เข้าคำตอบของค่าความถี่ธรรมชาติโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่

โหมดการสั่น	จำนวนของชิ้นส่วนย่อย				
	6	12	18	24	30
$m = 1$	140.658	140.658	140.658	140.658	140.658
$m = 2$	162.211	162.211	162.211	162.211	162.211
$m = 3$	170.993	170.993	170.993	170.993	170.993
$m = 4$	184.288	184.285	184.285	184.285	184.285
$m = 5$	206.965	206.931	206.931	206.931	206.931
$m = 6$	238.468	238.334	238.333	238.333	238.333
$m = 7$	266.793	266.681	266.680	266.680	266.680
$m = 8$	289.738	289.272	289.270	289.270	289.270
$m = 9$	340.682	339.234	339.227	339.226	339.226

ขนาดใหญ่ (Ω_{NL}) กับค่าความถี่ธรรมชาติแบบเป็นเชิงเส้น (Ω_L) จะพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมภายใต้การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ (Ω_{NL}) จะมีค่าต่ำกว่าค่าความถี่ธรรมชาติแบบเป็นเชิงเส้น (Ω_L) ดังแสดงในตารางที่ 3 นอกจากนี้ยังพบว่า เมื่อโหมดการสั่นมีลำดับสูงขึ้น ค่าความถี่ธรรมชาติภายใต้การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ยิ่งมีค่าต่ำกว่าค่าความถี่ธรรมชาติแบบเป็นเชิงเส้น เมื่อเปรียบเทียบกับโหมดการสั่นในลำดับต้น ๆ รูปที่ 3 แสดงการเปรียบเทียบโหมดการสั่นในลำดับที่ 1 ถึง 3 กับงานวิจัยของ Artioli และ Viola [9] ซึ่งได้คิดผลของค่าการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับหนึ่ง (First-Order Shear Deformation Theory) พบว่า มีค่าสอดคล้องกันทุกโหมดการสั่นแต่มีความแตกต่างกันเล็กน้อย เนื่องจากงานวิจัยนี้ไม่ได้คิดผลของค่าการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือน สำหรับโหมดการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ ลำดับที่ 1 ถึง 6 ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน แสดงได้ดังรูปที่ 4

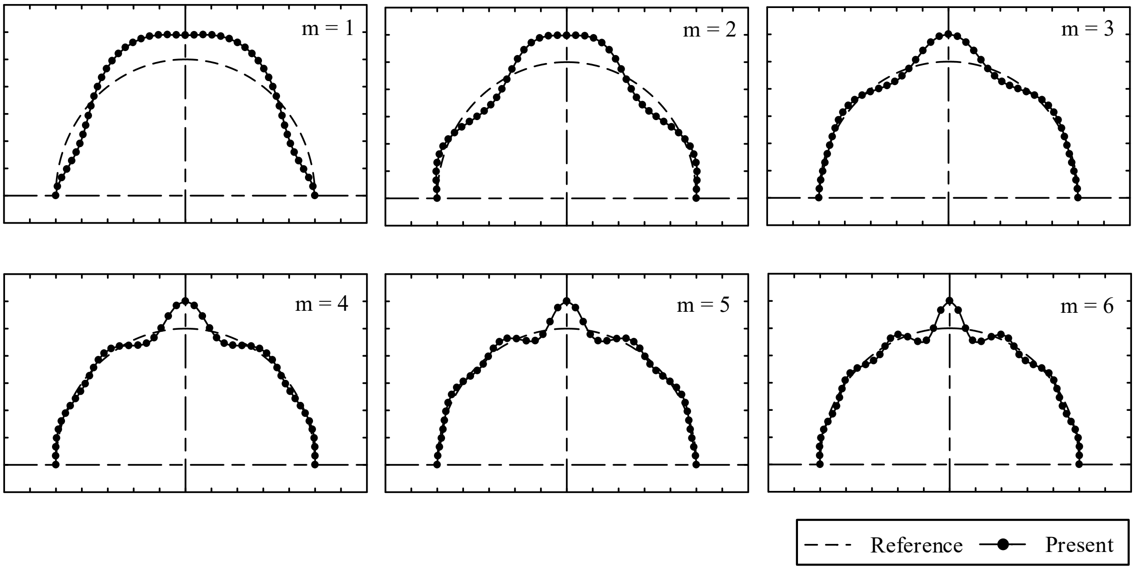
สำหรับค่าแอมพลิจูดสัมพัทธ์ (Relative Amplitude) ที่เกิดขึ้นในโหมดการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ลำดับที่ 1 ถึง 6 ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนจะแสดงได้ดังรูปที่ 5 ซึ่งจะพบว่า ค่าที่แอมพลิจูดสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ตำแหน่งจุดยอด (Apex) ของโครงสร้างโดม



รูปที่ 3 การเปรียบเทียบโหมดการสั่นของโครงสร้างโดมสำหรับกรณีที่มีความหนาคงที่ตลอดแนวเส้นเมอร์ริเดียน

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดมสำหรับกรณีที่มีความหนาคงที่ตลอดแนวเส้นเมอร์ริเดียน ($\Omega = \sqrt{\rho_s \omega_n^2 R^2 / E'}$)

โหมดการสั่น	Kunieda [6]	Artioli and Viola [9]	Lee [10]	Kim [28]	งานวิจัยนี้		
					Ω_L	Ω_{NL}	$\left\lvert \frac{\Omega_L - \Omega_{NL}}{\Omega_{NL}} \right\rvert \times 100\%$
$m = 1$	0.760	0.760	0.761	0.761	0.7615	0.7614	0.0165
$m = 2$	0.938	0.938	0.939	0.938	0.9384	0.9382	0.0217
$m = 3$	0.984	0.984	0.985	0.984	0.9844	0.9840	0.0359
$m = 4$	1.020	1.020	1.023	1.021	1.0215	1.0210	0.0521
$m = 5$	1.071	1.070	1.075	1.072	1.0723	1.0715	0.0675



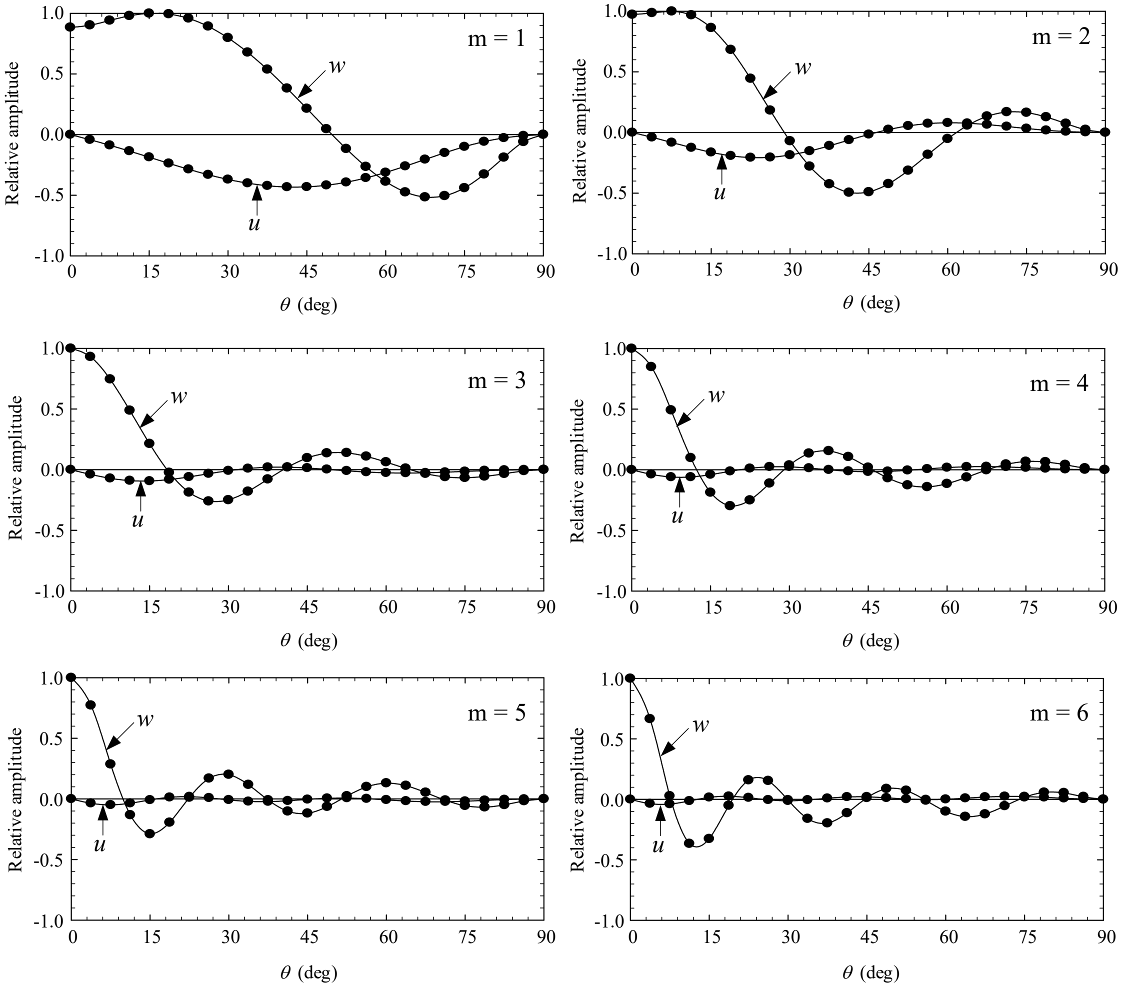
รูปที่ 4 โหมดการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน

ในเทอมของค่าการเสียรูปในแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ในโหมดการสั่นลำดับที่ 2 ถึง 5 ยกเว้นโหมดการสั่นที่ 1 ซึ่งเป็นโหมดพื้นฐาน (Fundamental Mode) พบว่า ค่าแอมพลิจูดสัมพัทธ์สูงสุดจะเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง θ มีค่าเท่ากับ 15 องศา ดังแสดงในรูปที่ 5

จากผลการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยนที่ได้จากงานวิจัยนี้ สามารถทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของโครงสร้างที่ส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมภายใต้การสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ ได้แก่ ค่าอัตราส่วนความหนา มุมรองรับส่วนโค้ง และมอดุลัสยืดหยุ่น โดยสามารถทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ได้ดังหัวข้อต่อไปนี้

3.1 ผลของการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความหนาที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

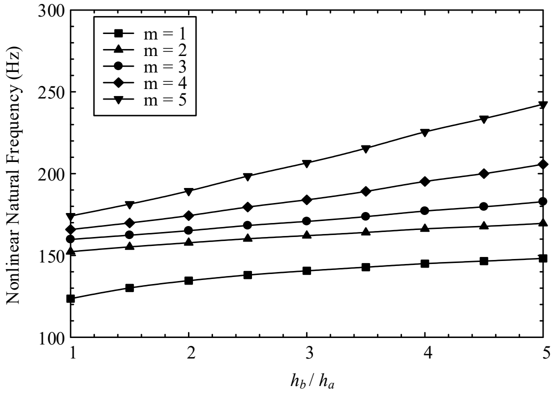
การศึกษาผลกระทบของการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความหนาต่อค่าความถี่ธรรมชาติแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน ดังแสดงในรูปที่ 6 จะสามารถทำได้โดยการปรับเปลี่ยน



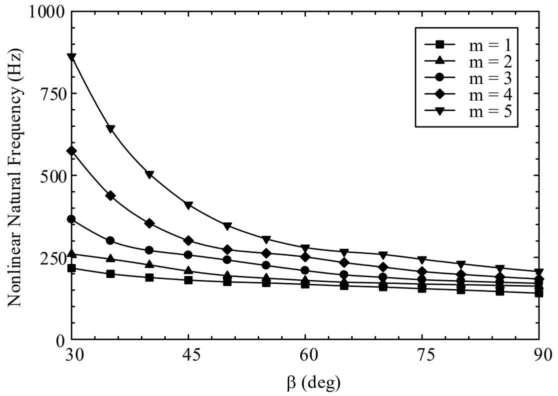
รูปที่ 5 ค่าแอมพลิจูดสัมพัทธ์ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน

อัตราส่วนความหนา ของโครงสร้างโดม (h_b/h_a) ตั้งแต่ 1.0 ถึง 5.0 โดยที่ความหนาที่จุดยอดของโครงสร้างโดม (h_a) และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ตามตารางที่ 1 มีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

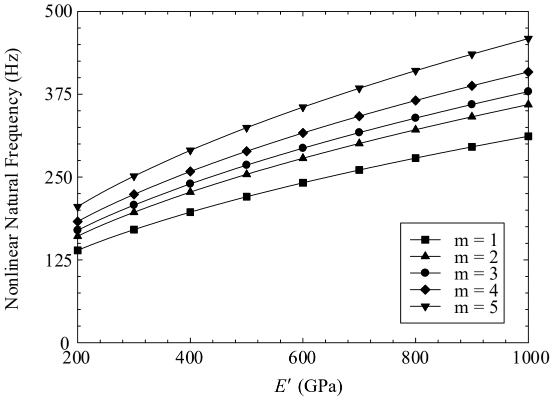
จากผลการศึกษาพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความหนา (h_b/h_a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น นั่นคือการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างจะทำให้ค่าความแข็งแกร่ง (Stiffness) เนื่องจากค่าพลังงานความเครียดในเทอมของเมมเบรนและโมเมนต์ดัดของโครงสร้างโดมมีค่าเพิ่มสูงขึ้นทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย นอกจากนี้ยังพบว่า การเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความหนาที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนค่ามุมรองรับส่วนโค้งที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนค่ามอดุลัสยืดหยุ่นที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

ในโหมดลำดับที่ 1 และ 2 มีลักษณะเป็นโค้งคว่ำ กล่าวคือ ค่าความชันของกราฟมีค่าลดลงเมื่อค่าอัตราส่วนความหนา (h_b/h_a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้นนั่นเอง

3.2 ผลของการแปรเปลี่ยนค่ามุมรองรับส่วนโค้งที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

การวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างโดมในบางกรณีจำเป็นต้องมีการออกแบบในหลากหลายรูปทรง เช่น โครงสร้างโดมทรงตื้นและทรงลึก ดังนั้น การแปรเปลี่ยนค่ามุมรองรับส่วนโค้ง (β) ที่มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดมจึงเป็นค่าพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญในการวิเคราะห์และออกแบบ โดยมีค่าตั้งแต่ 30 ถึง 90 องศา ในขณะที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

จากผลการศึกษาพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อค่ามุมรองรับส่วนโค้งมีค่าน้อย และค่าความถี่ธรรมชาติจะเริ่มลดลงอย่างช้า ๆ เมื่อขนาดมุมรองรับส่วนโค้งมีค่าสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7 ดังนั้น ในช่วงที่โครงสร้างโดมมีลักษณะเป็นรูปทรงตื้นจะพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติมีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างสูงกว่าช่วงที่โครงสร้างโดมมีลักษณะเป็นรูปทรงลึก นอกจากนี้ยังพบว่า ค่าอัตราส่วนความแข็งแกร่งต่อมวลของโครงสร้างโดมทรงตื้นจะมีค่าสูงกว่าโครงสร้างโดมทรงลึกนั่นเอง

3.3 ผลของการแปรเปลี่ยนค่ามอดุลัสยืดหยุ่นที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

สำหรับค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะนำเสนอในบทความนี้ คือ ผลของการแปรเปลี่ยนค่ามอดุลัสยืดหยุ่นที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

จากผลการศึกษาพบว่า เมื่อค่ามอดุลัสยืดหยุ่น (E') มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้น นั่นคือ โครงสร้างโดมจะมีค่าความแข็งแกร่งของโครงสร้างโดมเพิ่มสูงขึ้นส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย นอกจากนี้ยังพบว่า ความชันของค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าลดลงเมื่อค่ามอดุลัสยืดหยุ่นมีค่าเพิ่มสูงขึ้นในทุกโหมดการสั่น ดังแสดงในรูปที่ 8

4. อภิปรายผลและสรุป

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระด้วยแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างโดมรูปทรงกลมที่มีความหนาแปรเปลี่ยน โดยที่ฟังก์ชันความหนาของโครงสร้างโดมเขียนในเทอมของค่าพารามิเตอร์พื้นผิวและพลังงานความเครียด เนื่องจากเมมเบรนและโมเมนต์ดัดถูกนำมาพิจารณาในสมการแปรผัน การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับชิ้นส่วนคานแบบ C^2 ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง ผลการศึกษาพบว่า การแปรเปลี่ยนความหนาของ

โครงสร้างโดมในแนวพิกัดเมอร์เดียนส่งผลกระทบโดยตรงต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดม นั่นคือค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าสูงกว่ากรณีที่ความหนาของโครงสร้างโดมมีค่าคงที่ไม่มีการแปรเปลี่ยนตลอดแนวพิกัดเมอร์เดียน ในขณะที่โหมดการสั่นจะมีลักษณะใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ยังพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดมมีค่าลดลงเมื่อค่ามุมรองรับส่วนโค้งมีค่าสูงขึ้น คือ ค่าอัตราส่วนความแข็งแกร่งต่อมวลของโครงสร้างโดมรูปทรงตื้นมีค่าสูงกว่าโครงสร้างโดมรูปทรงลึก สุดท้ายเป็นการศึกษาการแปรเปลี่ยนค่ามอดุลัสยืดหยุ่น ซึ่งพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดมมีค่าสูงขึ้นเมื่อค่ามอดุลัสยืดหยุ่นมีค่าสูงขึ้น เนื่องจากโครงสร้างโดมมีค่าความแข็งแกร่งเพิ่มสูงขึ้น

ผลการศึกษาที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางและรูปทรงพาราโบลาที่มีความหนาแปรเปลี่ยนได้ รวมถึงโครงสร้างเปลือกบางที่ทำจากวัสดุคอมโพสิต (Composite Material) ได้

5. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับการสนับสนุนจากกองทุนส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม ตามสัญญาเลขที่ FF66-P1-090

เอกสารอ้างอิง

[1] H. Kunieda, “Classical buckling load of spherical domes under uniform pressure,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 118, no. 8, pp. 1513–1525, 1992.

[2] Y. Yasuzawa, “Structural response of underwater half drop shaped shell,” presented at the Proceedings of the 3rd International Offshore and Polar Engineering Conference, Singapore, Jun. 6–11, 1993.

[3] C. M. Wang, K. K. Vo, and Y. H. Chai, “Membrane analysis and minimum weight design of submerged spherical domes,” *Journal of Structural Engineering*, vol. 132, no. 2, pp. 253–259, 2006.

[4] W. Jiammeepreecha, S. Chucheepsakul, and T. Huang, “Nonlinear static analysis of deep water axisymmetric spherical half drop shell,” *KMUTT Research and Development Journal*, vol. 37, no. 2, pp. 239–255, 2014 (in Thai).

[5] W. Jiammeepreecha, S. Chucheepsakul, and T. Huang, “Nonlinear static analysis of an axisymmetric shell storage container in spherical polar coordinates with constraint volume,” *Engineering Structures*, vol. 68, pp. 111–120, 2014.

[6] H. Kunieda, “Flexural axisymmetric free vibrations of a spherical dome: Exact results and approximate solutions,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 92, no. 1, pp. 1–10, 1984.

[7] A. W. Leissa, *Vibration of Shells*. reprinted by The Acoustical Society of America, 1993.

[8] B. P. Gautham and N. Ganesan, “Free vibration characteristics of isotropic and laminated orthotropic spherical caps,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 204, no. 1, pp. 17–40, 1997.

[9] E. Artioli and E. Viola, “Free vibration analysis of spherical caps using a G.D.Q. numerical solution,” *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 128, no. 3, pp. 370–378, 2006.

[10] J. Lee, “Free vibration analysis of spherical caps by the pseudospectral method,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 23, no. 1, pp. 221–228, 2009.

[11] T. A. Duffey, J. E. Pepin, A. N. Robertson, M. L. Steinzig, and K. Coleman, “Vibrations of complete spherical shells with imperfections,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 129, no. 3, pp. 363–370, 2007.

[12] J. P. Wilkinson, “Natural frequencies of closed spherical shells,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 38, no. 2, pp. 367–368, 1965.

[13] A. Bryan, “Free vibration of thin spherical shells,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 139, no. 6, pp. 061020-1–061020-6, 2017.

[14] T. K. Varadan and K. A. V. Pandalai, “Nonlinear flexural oscillations of orthotropic shallow spherical shells,” *Computer and Structures*, vol. 9, no. 4, pp. 417–425, 1978.

[15] G. C. Sinharay and B. Banerjee, “Large amplitude free vibrations of shallow spherical shell and cylindrical shell – A new approach,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 20, no. 2, pp. 69–78, 1985.

[16] M. Sathyamoorthy, “Nonlinear vibrations of moderately thick orthotropic shallow spherical shells,” *Computer and Structures*, vol. 57, no. 1, pp. 59–65, 1995.

[17] W. Jiammeepreecha and S. Chucheepsakul, “Nonlinear axisymmetric free vibration analysis of liquid-filled spherical shell with volume constraint,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 139, no. 5, pp. 051016-1–051016-13, 2017.

[18] W. Jiammeepreecha and S. Chucheepsakul, “Nonlinear free vibration of internally pressurized axisymmetric spherical shell,” *KMUTT Research and Development Journal*, vol. 40, no. 4, pp. 509–532, 2017 (in Thai).

[19] H. L. Langhaar, *Foundations of Practical Shell Analysis*, Illinois: Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1964.

[20] K. Chaidachatorn, W. Jiammeepreecha, and S. Jamnam, “Axisymmetric and antisymmetric free vibrations of inflated toroidal membrane,” *The Journal of KMUTNB*, vol. 31, no. 4, pp. 661–674, 2021 (in Thai).

[21] H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics*, New York : John Wiley & Sons, Inc., 1962.

[22] K. Chaidachatorn, W. Jiammeepreecha, and S. Jamnam, “Axisymmetric free vibration of semi liquid-containment toroidal shell,” *Journal of Engineering and Innovation*, vol. 15, no. 2, pp. 48–61, 2022 (in Thai).

[23] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[24] W. Jiammeepreecha, K. Chaidachatorn, and S. Chucheepsakul, “Nonlinear static response of an underwater elastic toroidal storage container,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 228, pp. 111134-1–111134-12, 2021.

[25] G. T. Mase and G. E. Mase, *Continuum Mechanics for Engineers*, Florida: CRC Press, 1999.

[26] M. S. Qatu, *Vibration of Laminated Shells and Plates*, San Diego, CA: Academic Press Inc, 2004.

[27] G. Prathap and T. K. Varadan, “The large amplitude vibration of hinged beams,” *Computer and Structures*, vol. 9, no. 2, pp. 219–222, 1978.

[28] J. G. Kim, “A higher-order harmonic element for shells of revolution based on the modified mixed formulation,” Ph.D. dissertation, Department of Mechanical. Design and Production Engineering, Seoul National University, Seoul, South Korea, 1998.