



บทความวิจัย

## การวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกด้วยวิธีบาวนด์คาร์บอนอิเล็กเมนต์

ศิริกร จีระดิษฐ์ บุญมี ชินนาบุญ\* และ สมชาย ชูชีพสกุล

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 2470 9147 อีเมล: boonme.chi@mail.kmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.12.001

รับเมื่อ 15 พฤศจิกายน 2564 แก้ไขเมื่อ 3 มีนาคม 2565 ตอรับเมื่อ 31 มีนาคม 2565 เผยแพร่ออนไลน์ 4 ธันวาคม 2566

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอการประยุกต์ใช้วิธีบาวนด์คาร์บอนอิเล็กเมนต์เพื่อวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาที่ทำจากวัสดุออกเซติกแบบออร์โททรอปิก โดยใช้สมมติฐานแผ่นพื้นหนาทามทฤษฎีของมินต์ลินซึ่งพิจารณาการเสถียรเนื่องจากแรงเฉือน โดยวัสดุประเภทออกเซติกเป็นวัสดุที่มีค่าอัตราส่วนปัวซองเป็นลบ ซึ่งเป็นผลเนื่องจากการจัดเรียงโครงสร้างภายในของวัสดุ ลักษณะของแผ่นพื้นที่ใช้ในการวิเคราะห์จะเป็นแผ่นพื้นที่มีร่องรับแบบต่างๆ หรือมีร่องรับแบบผสม งานวิจัยนี้ประยุกต์ใช้หลักการสมการแอนะล็อกซึ่งจะสามารถแทนสมการควบคุมดั้งเดิมของปัญหาซึ่งมีความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการปัวซองสามสมการ ภายใต้การกระทำจากแหล่งกำเนิดสมมติโดยมีเงื่อนไขที่ขอบเขตคงเดิม จากนั้นใช้เทคนิคของวิธีบาวนด์คาร์บอนอิเล็กเมนต์ร่วมกับเรเดียลเบสิสฟังก์ชันทำให้ได้สมการอินทิกรัลที่ขอบเขต ซึ่งจะมีการแบ่งอิเล็กเมนต์เฉพาะที่ขอบเขตของปัญหาเท่านั้น จากผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณจากงานวิจัยนี้มีความถูกต้องที่ดีเยี่ยมเมื่อเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ และมีความสอดคล้องกับคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์อิเล็กเมนต์ ผลกระทบของพารามิเตอร์ต่างๆ ต่อการตอบสนองของโครงสร้างแผ่นพื้นได้รับการศึกษาอย่างละเอียด และเพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีบาวนด์คาร์บอนอิเล็กเมนต์ที่นำเสนอในงานบทความนี้ แผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อนแบบต่างๆ ได้ทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนท์อิเล็กเมนต์

**คำสำคัญ:** วิธีบาวนด์คาร์บอนอิเล็กเมนต์ ทฤษฎีแผ่นพื้นหนาของมินต์ลิน วัสดุออร์โททรอปิก วัสดุออกเซติก

การอ้างอิงบทความ: ศิริกร จีระดิษฐ์, บุญมี ชินนาบุญ, และ สมชาย ชูชีพสกุล, “การวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกด้วยวิธีบาวนด์คาร์บอนอิเล็กเมนต์,” วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, ปีที่ 34, ฉบับที่ 1, หน้า 1-14, เลขที่บทความ 241-045611, ม.ค.-มี.ค. 2567.



## Analysis of Thick Orthotropic Auxetic Plates by Boundary Element Method

Sirakorn Jeeradit, Boonme Chinnaboon\* and Somchai Chucheeepsakul

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand

\* Corresponding Author, Tel. 0 2470 9147, E-mail: boonme.chi@mail.kmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.12.001

Received 15 November 2021; Revised 3 March 2022; Accepted 31 March 2022; Published online: 4 December 2023

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### Abstract

The aim of this paper is to propose the application of boundary element method to analyze thick orthotropic auxetic plates based on Mindlin's thick plate theory in which the shear deformation is considered. Auxetics are defined as materials possess a negative Poisson's ratio due to their internal structures. Arbitrary plates with various or mixed boundary conditions are studied. This research employs the principle of the analog equation. According to this concept, the complicated governing differential equations of the original problem are replaced by three Poisson's equations with fictitious sources under the same boundary conditions. Then the boundary element technique together with the radial basis function series is applied to establish the boundary integral equations. Thus, the solution of the problem can be obtained from the boundary integral equations which the boundary of the problem is only discretized into elements. Numerical results from the proposed method show an excellent accuracy compared with available analytical solutions and are in good agreement with the finite element solution. The influences of various parameters on responses of plate structures are thoroughly investigated. To demonstrate efficiency of the boundary element method proposed in this paper, thick orthotropic auxetic plates with complex shapes are analyzed and compared the obtained numerical results with those from the finite element solution.

**Keywords:** Boundary Element Method, Mindlin's Thick Plate Theory, Orthotropic Material, Auxetic Material

## 1. บทนำ

ในปัจจุบันเทคโนโลยีทางวิศวกรรมโครงสร้างได้มีการพัฒนาขึ้นอย่างต่อเนื่อง โดยการพัฒนาจะต้องอาศัยการนำแนวคิดใหม่ๆ เข้ามาประยุกต์ใช้เพื่อเพิ่มความหลากหลายและความสะดวกในการใช้งานมากขึ้น ซึ่งในการจะเลือกใช้โครงสร้างและวัสดุให้เหมาะสมนั้นจะต้องอาศัยความเข้าใจในพฤติกรรมของโครงสร้างและวัสดุนั้นด้วย ในงานวิจัยนี้ทางผู้วิจัยมีความสนใจในเรื่องของการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โทโทรปิกที่คำนึงถึงพฤติกรรม การเสีรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนที่มีร่องรับแบบต่างๆ หรือมีที่ร่องรับแบบผสม และมีแรงกระจายสมำเสมอกระทำกับแผ่นพื้นที่จะพิจารณา โดยมีทฤษฎีของแผ่นพื้นเป็นไปตามสมมติฐานแผ่นพื้นของ Mindlin [1] ซึ่งเป็นแผ่นพื้นหนาปานกลางที่มีอัตราส่วนของความหนาของแผ่นพื้นต่อความยาวด้านหรือรัศมีของแผ่นพื้น ตั้งแต่ 0.1-0.2

วัสดุของแผ่นพื้นที่จะนำมาใช้ในงานวิจัยนี้คือ วัสดุประเภทออกเซติกแบบออร์โทโทรปิก วัสดุออร์โทโทรปิกจัดเป็นวัสดุประเภทแอนไอโซทรอปิกที่มีคุณสมบัติของวัสดุแตกต่างกันตามแกนหลักทั้ง 3 แกน ที่ตั้งฉากกัน เช่น ไม้ แผ่นพื้นลามิเนต ซึ่งมีค่ามอดูลัสยืดหยุ่นแตกต่างกันในแต่ละทิศทางที่ตั้งฉากกัน ส่งผลให้ สามารถรับแรงในแต่ละทิศทางได้ไม่เท่ากัน และสำหรับวัสดุประเภทออกเซติกนั้น เป็นวัสดุที่มีค่าอัตราส่วนปัวซองเป็นลบ โดยจะมีพฤติกรรมการเสีรูปร่างคือ เมื่อใส่แรงดึงวัตถุจะขยายออกในแนวตั้งฉากกับแรงที่กระทำ และเมื่อใส่แรงอัดวัตถุจะหดตัวในแนวตั้งฉากกับแรงที่กระทำ ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากการจัดเรียงโครงสร้างภายในของวัสดุ ประโยชน์ของวัสดุออกเซติก คือ มีความสามารถในการดูดซับพลังงานได้ดี ช่วยเพิ่มค่าความแข็งเฉือน (Shear Stiffness) ของวัสดุ และมีความ สามารถในการป้องกันการแตกหักของวัสดุได้ดี ตัวอย่างการประยุกต์ใช้วัสดุออกเซติกในงานวิศวกรรม เช่น แผ่นพื้นประกบแบบออกเซติก(Sandwich Auxetic Plate)

ในงานวิจัยนี้จะนำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีบาวนารีเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออกเซติก แบบออร์โทโทรปิกที่คำนึงถึงการเสีรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน ซึ่งวิธีนี้จะทำการคำนวณโดยการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะที่บริเวณขอบเขต

(Boundary) แล้วนำค่าที่ได้จากการคำนวณที่ขอบเขตกลับไปแทนค่าในสมการอินทิกรัลเพื่อหาค่าตอบภายในโดเมนที่ต้องการพิจารณา ทำให้ช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณและค่าตอบที่ได้จะมีความแม่นยำกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ โดยในกระบวนการบาวนารีเอลิเมนต์ เนื่องจากสมการของปัญหาของแผ่นพื้นที่จะพิจารณาในงานวิจัยนี้มีความซับซ้อน Katsikadelis [2] จึงได้เสนอแนะให้ประยุกต์ใช้วิธีสมการแอนะล็อก (Analog Equation Method) ในการสร้างระบบสมการ ซึ่งจะสามารถหาค่าตอบได้โดยตรงด้วยวิธีบาวนารีเอลิเมนต์ สำหรับงานวิจัยที่ผ่านมา ใน ค.ศ. 1988 Pandya และ Kant [3] ได้มีการนำวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการตัดของแผ่นพื้นออร์โทโทรปิกที่รับแรงกระจายสมำเสมอและแรงกระทำแบบจุดที่กึ่งกลางแผ่นพื้นและมีที่ร่องรับแบบธรรมดา (Simple Support) ถัดมาใน ค.ศ. 1991 Wang และ Huang [4] ได้ทำการประยุกต์ใช้วิธีบาวนารีเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของแผ่นพื้นหนาประเภทออร์โทโทรปิกที่มีแรงกระจายสมำเสมอกระทำกับแผ่นพื้นโดยมีที่ร่องรับแบบยึดแน่น (Clamped Support) และแบบธรรมดา โดยใช้สมมติฐานในการวิเคราะห์แผ่นพื้นตามทฤษฎีแผ่นพื้นของ Reissner [5] โดยใช้ฟังก์ชันเคอร์เนลในการหาค่าตอบของปริพันธ์ที่ขอบเขต และใน ค.ศ. 2015 Babouskos และ Katsikadelis [6] ได้ใช้วิธีบาวนารีเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการตัดของแผ่นพื้นหนาประเภทแอนไอโซทรอปิก โดยค่าตอบที่ได้จากการวิเคราะห์มีความสอดคล้องกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ตามทฤษฎีของ Mindlin จากนั้นใน ค.ศ. 2015 Lim [7] ได้มีการวิจัยผลของการเสีรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนของแผ่นพื้นออกเซติกประเภทไอโซทรอปิกโดยได้เสนอให้ใช้สูตรปรับแก้แรงเฉือนจากสูตรแมนตรงของ Mindlin โดยได้ทำการปรับปรุงสูตรปรับแก้แรงเฉือนเพื่อให้ใช้งานได้เหมาะสมยิ่งขึ้น

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือ เพื่อศึกษาการประยุกต์ใช้วิธีบาวนารีเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์พฤติกรรมการเสีรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนของแผ่นพื้นหนาออกเซติก แบบออร์โทโทรปิก และศึกษาผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของแผ่นพื้นที่พิจารณา เช่น การเปลี่ยนแปลงของอัตรา



ส่วนปัวซงที่มีค่าเป็นบวกและลบ การเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของมอดูลัสยืดหยุ่นในแต่ละทิศทาง และเพื่อตรวจสอบความแม่นยำของวิธีบาวน์ดารีเอลิเมนต์โดยการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากงานวิจัยนี้กับคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงเลขอื่นๆ รวมไปถึงประยุกต์ใช้วิธีบาวน์ดารีเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นรูปร่างอื่นๆ ที่ซับซ้อน แล้วนำคำตอบที่ได้ไปเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจะแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพและข้อดีของวิธีบาวน์ดารีเอลิเมนต์ที่แบ่งเอลิเมนต์เฉพาะขอบเขตเท่านั้น ในขณะที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องแบ่งเอลิเมนต์ตามโดเมนของแผ่นพื้น

## 2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

### 2.1 วัสดุออร์โททรอปิก

วัสดุออร์โททรอปิก (Orthotropic Material) จะมีคุณสมบัติของวัสดุแตกต่างกันตามแกนหลัก 3 แกนที่ตั้งฉากกัน โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดดังสมการที่ (1)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

จากสมการที่ (1) Hwu [8] ได้กำหนดค่า คงที่ยืดหยุ่น  $C_{ij}$  ไว้ดังสมการที่ (2)–(4)

$$C_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}, \quad C_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \quad (2)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{\nu_{yx}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \quad (3)$$

$$C_{44} = G_{yz}, \quad C_{55} = G_{xz}, \quad C_{66} = G_{xy} \quad (4)$$

โดยที่  $E_x$  และ  $E_y$  คือ ค่ามอดูลัสยืดหยุ่นในแกน  $x$  และ  $y$ ,  $G_{xy}$ ,  $G_{xz}$  และ  $G_{yz}$  คือค่ามอดูลัสยืดหยุ่นเฉือนในทิศทาง  $xy$  ทิศทาง  $xz$  และทิศทาง  $yz$  ตามลำดับ และ  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$  คืออัตราส่วนปัวซงในทิศทาง  $xy$  และ  $yx$  ตามลำดับโดยที่  $\nu_{yx}$  มีค่าเท่ากับ  $E_y\nu_{xy}/E_x$

### 2.2 วัสดุออกเซติก

วัสดุออกเซติก (Auxetic Material) คือ วัสดุที่มีค่าอัตราส่วนปัวซงเป็นลบซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากรูปร่างโมเลกุลของวัสดุ โดยมีพฤติกรรมการเสียรูปคือเมื่อใส่แรงดึง วัสดุจะขยายออกในแนวตั้งฉากกับแรงที่กระทำ และเมื่อใส่แรงอัด วัสดุจะหดตัวในแนวตั้งฉากกับแรงที่กระทำ โดย Lim [7] ได้เสนอให้ใช้สูตรปรับแก้แรงเฉือนที่เหมาะสมสำหรับช่วงอัตราส่วนปัวซงตั้งแต่  $-1$  ถึง  $0.5$  ดังสมการที่ (5)

$$K_s = -0.0748\nu^3 - 0.0266\nu^2 + 0.3339\nu + 0.7637 \quad (5)$$

เมื่อ  $K_s$  คือ ค่าปรับแก้แรงเฉือน และ  $\nu$  คือ อัตราส่วนปัวซง

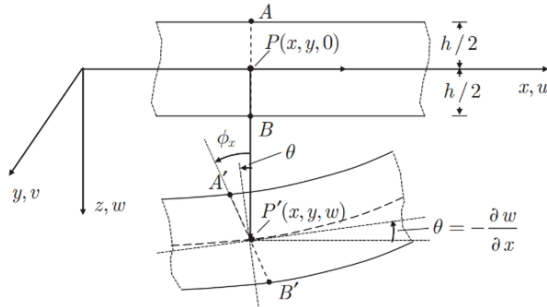
### 2.3 ระบบสมการของแผ่นพื้นหนาออร์โททรอปิกตามทฤษฎีแผ่นพื้นของ Mindlin

ทฤษฎีแผ่นพื้นหนาของ Mindlin มีสมมติฐาน คือ เมื่อแผ่นพื้นมีการเสียรูป หนาที่ตัดฉากกับพื้นผิวกึ่งกลาง ความหนาของแผ่นพื้นจะยังคงเป็นระนาบ แต่เส้นที่ตั้งฉากกับพื้นผิวกึ่งกลางความหนาของแผ่นพื้นจะไม่ตั้งฉากหลังจากแผ่นพื้นเสียรูป ดังแสดงในรูปที่ 1 โดยมีการกระจัดของแผ่นพื้นดังสมการที่ (6)–(8)

$$u(x, y, z) = z\phi_x(x, y) \quad (6)$$

$$v(x, y, z) = z\phi_y(x, y) \quad (7)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (8)$$



รูปที่ 1 การเสียรูปตามสมมติฐานของ Mindlin

โดยที่  $u$  และ  $v$  คือ การกระจัดในทิศทางแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ ขณะที่  $w, \phi_x$  และ  $\phi_y$  คือ การโก่งตัวในทิศทางแกน  $z$  การหมุนรอบแกน  $y$  และ  $x$  ตามลำดับ ซึ่งค่าโมเมนต์ดัด โมเมนต์บิด และแรงเฉือนจะมีความสัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ ดังสมการที่ (9)–(11)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

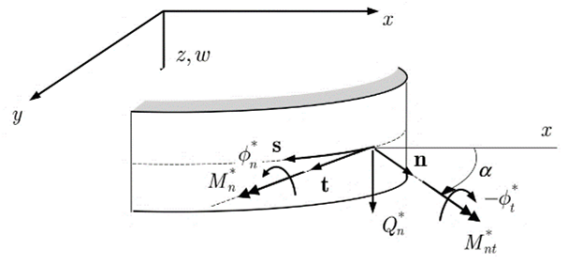
$$M_{xy} = -M_{yx} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

เมื่อ  $D_{ij} = \frac{C_{ij}h^3}{12}$ ,  $A_{ij} = K_s h C_{ij}$  ซึ่ง  $h$  คือ ความหนาของแผ่นพื้น และ  $K_s$  คือ ค่าปรับแก้แรงเฉือน ซึ่งหาได้จากสมการที่ (5) และเมื่อใช้หลักการแปรผันของพลังงาน [9] โดยมีแรงกระจายสม่ำเสมอ  $f$  กระทำกับแผ่นพื้นทำให้ได้สมการสมดุลของแผ่นพื้นดังสมการที่ (12)–(14)

$$D_{11}\phi_{x,xx} + D_{66}\phi_{x,yy} + (D_{12} + D_{66})\phi_{y,xy} - A_{55}(\phi_x + w_{,x}) - A_{45}(\phi_y + w_{,y}) = 0 \quad (12)$$

$$D_{66}\phi_{y,xx} + D_{22}\phi_{y,yy} + (D_{12} + D_{66})\phi_{x,xy} - A_{45}(\phi_x + w_{,x}) - A_{44}(\phi_y + w_{,y}) = 0 \quad (13)$$



รูปที่ 2 แรงและการกระจัดที่ขอบเขต

$$A_{55}(\phi_x + w_{,xx}) + A_{45}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x} + 2w_{,xy}) + A_{44}(w_{,yy} + w_{,yy}) = -f \quad (14)$$

สำหรับสมการเงื่อนไขของที่รองรับแต่ละประเภทของแผ่นพื้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ได้ดังนี้

$$\alpha_1 w + \alpha_2 Q_n = \alpha_3 \quad (15)$$

$$\beta_1 \phi_n + \beta_2 M_n = \beta_3 \quad (16)$$

$$\gamma_1 \phi_t + \gamma_2 M_{nt} = \gamma_3 \quad (17)$$

เมื่อ

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y \quad (18)$$

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2n_x n_y M_{yx} \quad (19)$$

$$M_{nt} = M_{xy}(n_y^2 - n_x^2) + n_x n_y (M_x - M_y) \quad (20)$$

$$\phi_n = n_x \phi_x + n_y \phi_y, \phi_t = -n_y \phi_x + n_x \phi_y \quad (21)$$

เมื่อ  $n_x = \cos \alpha$  และ  $n_y = \sin \alpha$  ดังแสดงในรูปที่ 2 และจากสมการที่ (15)–(17) ที่รองรับแต่ละประเภทจะมีค่า  $\alpha_i, \beta_i$  และ  $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$  ดังนี้

1) ที่รองรับแบบยึดแน่น (Clamped support)

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0,$$



$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0$$

2) ที่รองรับธรรมดาแบบอ่อน (Soft type Simply Support)

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0,$$

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0$$

3) ที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง (Hard type Simply Support)

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0,$$

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0$$

4) ที่รองรับแบบอิสระ (Free Support)

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0,$$

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0$$

5) ที่รองรับยืดหยุ่น (Elastic Support)

$$\alpha_1 = k_s(z), \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0,$$

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0$$

6) ที่รองรับยืดหยุ่นแบบยึดรั้ง (Rotational Restraint)

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta_1 = k_r(z), \beta_2 = 1, \beta_3 = 0,$$

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0$$

โดยที่  $k_s(z)$  และ  $k_r(z)$  คือ ค่าสติเฟนส์ด้านทานการเคลื่อนที่ (Translational Stiffness) และค่าสติเฟนส์ด้านทานการหมุน (Rotational Stiffness) ตามลำดับ

## 2.4 วิธีสมการแอนะล็อก

ในการหาคำตอบของสมการที่ (12)–(17) จะทำได้ค่อนข้างยากเนื่องจากสมการมีความซับซ้อนในงานวิจัยนี้จึงประยุกต์ใช้หลักการสมการแอนะล็อก [2] กล่าวคือ สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาแผ่นพื้หนาดอกเซตติคแบบออร์โททรอปิกจะสามารถถูกแทนที่ด้วยสมการปัวซง (Poisson's Equation) สามสมการ ภายใต้การกระทำจากแหล่งกำเนิดสมมติ (Fictitious Sources) และคงไว้ซึ่งเงื่อนไขที่ขอบเขตเดิม ซึ่งตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของปัญหาที่ต้องการทราบในงานวิจัยนี้คือค่าการโก่งตัว และค่าการหมุน โดยสามารถหาได้จากสมการปัวซง ดังแสดงในสมการที่ (22)–(24)

$$\nabla^2 w = b_1(x, y) \quad (22)$$

$$\nabla^2 \phi_x = b_2(x, y) \quad (23)$$

$$\nabla^2 \phi_y = b_3(x, y) \quad (24)$$

โดยที่  $b_1, b_2$  และ  $b_3$  คือ แหล่งกำเนิดสมมติภายในโดเมน ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้เอกลักษณ์ข้อที่สองของกรีนส์ [10] เพื่อเปลี่ยนสมการที่ (22)–(24) ให้อยู่ในรูปสมการปริพันธ์ ดังแสดงในสมการที่ (25)–(27) โดยมีจุดที่แรงกระทำ (Source Point) คือจุด  $p$  และจุดที่พิจารณา (Field Point) คือจุด  $q$

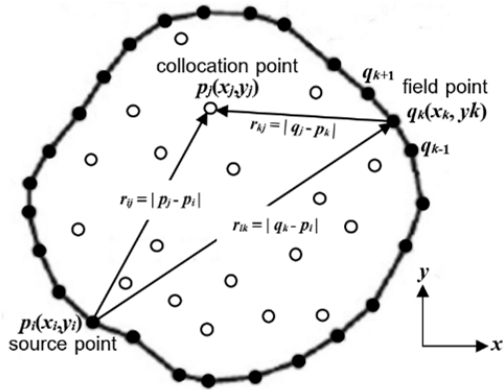
$$ew(p) = -\int_{\Gamma} (u^* w_{,n} - u_{,n}^* w) ds + \int_{\Omega} u^* b_1 d\Omega \quad (25)$$

$$e\phi_x(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{x,n} - u_{,n}^* \phi_x) ds + \int_{\Omega} u^* b_2 d\Omega \quad (26)$$

$$e\phi_y(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{y,n} - u_{,n}^* \phi_y) ds + \int_{\Omega} u^* b_3 d\Omega \quad (27)$$

โดยที่  $\varepsilon = 1$  เมื่อ  $p \in \Omega$  และ  $\varepsilon = 0.5$  เมื่อ  $p \in \Gamma$  และ  $u^*$  คือคำตอบพื้นฐานมีค่าเท่ากับ  $\ln r/2\pi$  และ  $u_{,n}^*$  คืออนุพันธ์ของคำตอบพื้นฐานในทิศตั้งฉากกับขอบเขต ณ จุด  $q$  โดยที่  $r = |q - p|$  ซึ่งพจน์  $b_1, b_2$  และ  $b_3$  สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของผลรวม  $b_{(l)} = \sum_{j=1}^M a_j^{(l)} f_j$  โดยที่  $l = 1, 2, 3$  และ  $M$  คือจำนวนจุดภายในโดเมน (Collocation Points) และ  $f_j = f_j(r)$  สามารถประมาณค่าได้ด้วยวิธี Radial Basis Functions [11] โดยที่  $r \equiv r_{ji} = |p_i - p_j|$  คือ ระยะระหว่างจุดภายในโดเมน  $p_j(x_j, y_j)$  กับจุดใดๆ  $p_i(x_i, y_i) \in \Omega \cup \Gamma$  ซึ่งมีตำแหน่งแสดงดังรูปที่ 3 ซึ่งจากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีที่สองของกรีนส์เพื่อแก้สมการปัวซง  $\nabla^2 \hat{u}_j = f_j$  จะได้คำตอบเฉพาะ  $\hat{u}_j = r^4(2\ln r - 1)/32$  และเมื่อแทนในสมการที่ (25)–(27) จะได้เป็นสมการปริพันธ์ที่ขอบเขตดังสมการที่ (28)–(30)

$$ew(p) = -\int_{\Gamma} (u^* w_{,n} - u_{,n}^* w) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(l)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u_{,n}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (28)$$



รูปที่ 3 จุดที่แรงกระทำ (Source Point) จุดที่พิจารณา (Field Point) และจุดภายในโดเมน (Collocation Point)

$$\varepsilon\phi_x(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{x,n} - u_{,n}^* \phi_x) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u_{,n}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (29)$$

$$\varepsilon\phi_y(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{y,n} - u_{,n}^* \phi_y) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u_{,n}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (30)$$

เมื่อทำการอนุพันธ์สมการที่ (28)–(30) ในทิศทางแกนสัมผัสที่จุด  $p$  เมื่อ  $p \in \Gamma$  และแกนสัมผัสคือ  $\tau = \{\tau_x, \tau_y\}$  จะได้ดังสมการที่ (31)–(33)

$$\frac{1}{2} w_{,\tau}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* w_{,n} - u_{,nr}^* [w - w(p)]) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \frac{1}{2} \hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nr}^* [\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)]) ds \right\} \quad (31)$$

$$\frac{1}{2} \phi_{x,\tau}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \phi_{x,n} - u_{,nr}^* [\phi_x - \phi_x(p)]) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \frac{1}{2} \hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nr}^* [\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)]) ds \right\} \quad (32)$$

$$\frac{1}{2} \phi_{y,\tau}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \phi_{y,n} - u_{,nr}^* [\phi_y - \phi_y(p)]) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \frac{1}{2} \hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nr}^* [\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)]) ds \right\} \quad (33)$$

ตัวแปรไม่ทราบค่าในโดเมนหาได้จากการอนุพันธ์สมการปริพันธ์ที่ขอบเขตได้ เมื่อกำหนดให้  $v, g = 0, x, y$  และ  $p \in \Omega$  จะได้

$$w_{,vg}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,vg}^* w_{,n} - u_{,nvg}^* w) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \hat{u}_{j,vg}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (34)$$

$$\phi_{x,vg}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \phi_{x,n} - u_{,nvg}^* \phi_x) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \hat{u}_{j,vg}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (35)$$

$$\phi_{y,vg}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \phi_{y,n} - u_{,nvg}^* \phi_y) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \hat{u}_{j,vg}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (36)$$

โดยที่ค่าปริพันธ์ที่ขอบเขตของ  $u^*$  และ  $\hat{u}_j$  สามารถหาได้จากการใช้เคอร์เนลฟังก์ชัน (Kernel Function) [12] และจากสมการที่ (12)–(21) พบว่า มีตัวแปรไม่ทราบค่าที่ขอบเขตทั้งหมด คือ  $w, w_{,n}, w_{,r}, \phi_x, \phi_{x,n}, \phi_{x,r}, \phi_y, \phi_{y,n}$  และ  $\phi_{y,r}$  ที่สามารถหาได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (12)–(17), (28)–(33) เมื่อทราบค่า  $a_j$  ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงเลข [13] โดยสามารถอธิบายในสมการเมทริกซ์ได้ ดังสมการที่ (37)

$$[A]\{x\} = [C]\{a_j\} + \{B\} \quad (37)$$

เมื่อ  $[A]$  คือ ค่าปริพันธ์ที่ขอบเขตของเคอร์เนล และค่าสัมประสิทธิ์จากเงื่อนไขที่ขอบเขตประเภทต่างๆ โดยมีขนาด  $9N \times 9N$ ,  $\{x\}$  คือ ตัวแปรไม่ทราบค่าที่ขอบเขตมีขนาด  $9N \times 1$ ,  $[C]$  คือ ค่าของสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $a_j$  มีขนาด  $9N \times 3M$ ,  $\{B\}$  คือ ค่าของ  $\alpha_3, \beta_3$  และ  $\gamma_3$  มีขนาด  $9N \times 1$  และ  $\{a_j\}$  คือ สัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่ต้องการหา โดยมีขนาด  $3M \times 1$  เมื่อ  $N$  คือ จำนวนเอลิเมนต์ (Constant Elements) ที่ขอบเขต และ  $M$  คือ จำนวนจุดในโดเมน

### 3. ผลการทดลอง

#### 3.1 ความแม่นยำของวิธีบาวด์ารีเอลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธีบาวด์ารีเอลิเมนต์ไปเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ และวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ เพื่อแสดงให้เห็นถึงความถูกต้อง และประสิทธิภาพของวิธีบาวด์ารีเอลิเมนต์ที่เสนอในงานวิจัยนี้



3.1.1 แผ่นพื้่นวงกลมหนาไอโซทรอปิกรัศมี  $a = 1$  เมตร ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 1,000$  กิโลพาสคัล และมีที่รองรับแบบยึดแน่น โดยที่  $h = 0.2, 0.25$  และ  $0.3$  เมตร  $E = 2.039 \times 10^{10}$  กิโลพาสคัล  $\nu = 0.3, G = 0.784 \times 10^{10}$  กิโลพาสคัล  $M = 379$  จุด  $N = 400$  เอลิเมนต์ แสดงผลการคำนวณสมการที่ (38) ดังตารางที่ 1

$$\%Diff. = \frac{|\text{คำตอบจากวิธีอื่น} - \text{คำตอบจากงานวิจัยนี้}|}{\text{คำตอบจากวิธีอื่น}} \times 100 \quad (38)$$

ตารางที่ 1 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวสูงสุด และค่าโมเมนต์ตัดสูงสุดแบบไร้หน่วยของแผ่นพื้่นตามหัวข้อที่ 3.1.1

$\frac{h}{a}$	$\bar{w} = \frac{w_{max} D}{qa^4}$			$\bar{M} = \frac{M_{max}}{qa^2}$		
	Present	Analytical [14]	%Diff.	Present	Analytical [14]	%Diff.
0.2	0.01843	0.01848	0.2706	0.08139	0.08125	0.1723
0.25	0.01023	0.01029	0.5831	0.08136	0.08125	0.1354
0.3	0.00648	0.00653	0.7657	0.08134	0.08125	0.1108

3.1.2 แผ่นพื้่นวงกลมหนาออกเซติกแบบไอโซทรอปิก ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 1,000$  กิโลพาสคัล และมีที่รองรับแบบยึดแน่น โดยที่ แผ่นพื้่นมีรัศมี  $a = 1$  เมตร  $\nu = -0.9, -0.25, 0$  และ  $0.25, h = 0.1, 0.2$  เมตร,  $E = 2.039 \times 10^{10}$  กิโลพาสคัล  $M = 379$  จุด  $N = 400$  เอลิเมนต์ โดยมีผลดังตารางที่ 2 เมื่อคำนวณตามสมการที่ (38)

3.1.3 แผ่นพื้่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนาประเภทออร์โททรอปิก ขนาด  $1 \times 1$  เมตร<sup>2</sup> ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 1,000$  กิโลพาสคัล และมีที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง (Hard Type) โดยที่  $E_y = 1 \times 10^6$  กิโลพาสคัล  $\nu = 0.25, h = 0.1, 0.2$  เมตร  $G_{xy} = G_{xz} = 0.6E_y, G_{yz} = 0.5E_y, M = 625$  จุด  $N = 400$  ขึ้น แสดงผลการคำนวณ ดังตารางที่ 3 และ 4 เมื่อคำนวณตามสมการที่ (38)

ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวสูงสุดแบบไร้หน่วยของแผ่นพื้่นตามหัวข้อที่ 3.1.2

$\frac{h}{a}$	Method	$\bar{w} = \frac{w_{max} D}{qa^4}$			
		Poisson's Ratio			
		-0.9	-0.25	0	0.25
0.1	Present	0.0164	0.0810	0.0865	0.0815
	Analytical [15]	0.0161	0.0795	0.0851	0.0803
	%Diff.	1.8634	1.8868	1.6451	1.4944
0.2	Present	0.0175	0.0873	0.0942	0.0905
	Analytical [15]	0.0174	0.0868	0.0937	0.0901
	%Diff.	0.5747	0.5760	0.5336	0.4440

ตารางที่ 3 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวสูงสุดและค่าโมเมนต์ในทิศทางแกน  $x$  สูงสุดแบบไร้หน่วยของแผ่นพื้่นตามหัวข้อที่ 3.1.3

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{h}{a}$	$\bar{w} = \frac{w_{max} E_y}{hq}$			$\bar{M}_x = \frac{M_{xmax}}{a^2 q}$		
		Present	FEM [3]	%Diff.	Present	FEM [3]	%Diff.
3	0.1	293.940	293.270	0.2285	0.0710	0.0716	0.8380
	0.2	21.470	21.200	1.2736	0.0698	0.0695	0.4317
10	0.1	158.010	158.190	0.1138	0.1099	0.1114	1.3465
	0.2	13.693	13.680	0.0950	0.1045	0.1051	0.5709
40	0.1	67.327	67.700	0.5510	0.1317	0.1344	2.0089
	0.2	8.813	8.900	0.9775	0.1244	0.1266	1.7378

ตารางที่ 4 ผลการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ในทิศทางแกน  $y$  สูงสุดและค่าโมเมนต์บิดสูงสุดแบบไร้หน่วยของแผ่นพื้่นตามหัวข้อที่ 3.1.3

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{h}{a}$	$\bar{M}_y = \frac{M_{ymax}}{a^2 q}$			$\bar{M}_{xy} = \frac{M_{xymax}}{a^2 q}$		
		Present	FEM [3]	%Diff.	Present	FEM [3]	%Diff.
3	0.1	0.0261	0.0265	1.5094	0.0310	0.0319	2.8213
	0.2	0.0270	0.0278	2.8777	0.0314	0.0314	0.0000
10	0.1	0.0133	0.0147	9.5238	0.0169	0.0171	1.1696
	0.2	0.0157	0.0171	8.1871	0.0187	0.0191	2.0942
40	0.1	0.0071	0.0083	14.4578	0.0075	0.0074	1.3514
	0.2	0.0109	0.0122	10.6557	0.0105	0.0110	4.5455

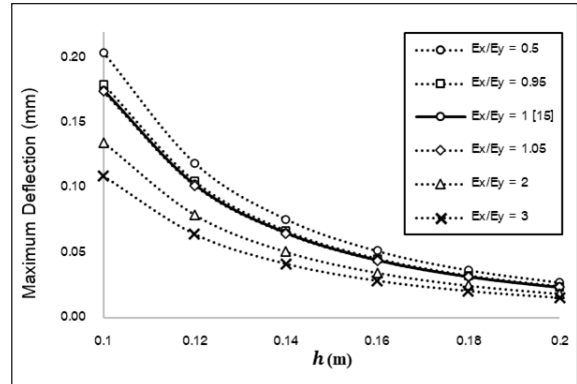


จากตารางที่ 1 และ 2 ค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่ได้จากวิธีบาวน์มีรีเอลิเมนต์ที่นำเสนอในบทความนี้มีความถูกต้องแม่นยำสูงเมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบแม่นยำที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงข้อดีของวิธีบาวน์มีรีเอลิเมนต์ เนื่องจากวิธีบาวน์มีรีเอลิเมนต์จะทำการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะที่ขอบเขต ทำให้วิธีบาวน์มีรีเอลิเมนต์มีข้อได้เปรียบมากกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่อาจจะมีคลาดเคลื่อนจากการแบ่งเอลิเมนต์ภายในโดเมน เช่น Shear Locking และจากตารางที่ 1-4 แสดงให้เห็นว่าวิธีบาวน์มีรีเอลิเมนต์มีความถูกต้องแม่นยำเมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์และมีคำตอบที่ใกล้เคียงสอดคล้องกับผลการคำนวณจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทั้งในกรณีที่แผ่นพื้นมีคุณสมบัติเป็นไอโซทรอปิก ออกเซติกแบบไอโซทรอปิก และออกเซติกแบบออร์โททรอปิก รวมทั้งสามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างเป็นวงกลม และสี่เหลี่ยม ที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ แสดงให้เห็นว่าวิธีบาวน์มีรีเอลิเมนต์ที่นำเสนอนี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นทีพิจารณาในงานวิจัยนี้ได้เป็นอย่างดีมีประสิทธิภาพ

### 3.2 การศึกษาผลกระทบเนื่องจากค่าพารามิเตอร์ของแผ่นพื้น และค่า $k_r$ ของที่รองรับยึดหยุ่นแบบยืดหยุ่น

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาผลกระทบเนื่องจากค่าพารามิเตอร์ของแผ่นพื้น คือ ความหนา และค่ามอดุลัสยืดหยุ่นของแผ่นพื้น โดยในการวิเคราะห์จะทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการวิเคราะห์แผ่นพื้นวงกลมหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกด้วยวิธีบาวน์มีรีเอลิเมนต์ กับคำตอบจากวิธีเชิงวิเคราะห์ [15] ของแผ่นพื้นวงกลมหนาออกเซติกแบบไอโซทรอปิก และจะทำการศึกษาผลกระทบของค่า  $k_r$  ของที่รองรับยึดหยุ่นแบบยืดหยุ่นโดยมีตัวอย่างดังนี้

3.2.1 แผ่นพื้นหนาวงกลมหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิก ขนาดรัศมี 1 เมตร ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 1$  กิโลพาสคัล และมีที่รองรับแบบยึดแน่น โดยที่  $E_y = 1 \times 10^6$  กิโลพาสคัล  $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = -0.3$ ,  $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 7.14 \times 10^5$  กิโลพาสคัล  $M = 379$  จุด  $N = 400$  เอลิเมนต์ โดยมีผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 ค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นตามหัวข้อที่ 3.2.1

3.2.2 แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิก ขนาด  $1 \times 1$  ตารางเมตร ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 20$  กิโลพาสคัล และมีที่รองรับยึดหยุ่นแบบยึดรั้ง (Elastic Restraint) โดยที่  $h = 0.1$  เมตร  $E_x = 3 \times 10^6$ ,  $E_y = 1 \times 10^6$  กิโลพาสคัล  $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = -0.25$ ,  $G_{xy} = G_{xz} = 0.6E_y$ ,  $G_{yz} = 0.5E_y$ ,  $M = 625$  จุด  $N = 400$  เอลิเมนต์ ซึ่งผลการวิเคราะห์ที่ได้จะแสดงค่าแบบไร้หน่วยตามสมการที่ (39)-(42) ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 ผลการวิเคราะห์พฤติกรรมของแผ่นพื้นแบบไร้หน่วย ตามหัวข้อที่ 3.2.2

$k_r$	$\bar{w}$	$\bar{M}_x$	$\bar{M}_y$	$\bar{M}_{xy}$
Simply Supported	346.4589	0.0715	0.0183	0.0362
0	346.4589	0.0715	0.0183	0.0362
1	345.9426	0.0714	0.0183	0.0361
102	304.4371	0.0634	0.0169	0.0296
103	187.4438	0.0418	0.0124	0.0140
104	119.6417	0.0308	0.0084	0.0084
105	108.5681	0.0292	0.0076	0.0077
106	107.3789	0.0291	0.0075	0.0076
Clamped Support	107.2458	0.0290	0.0075	0.0076

$$\bar{w} = \frac{w_{\max} E_y}{hq} \quad (39)$$



$$\overline{M_x} = \frac{M_{x \max}}{a^2 q} \tag{40}$$

$$\overline{M_y} = \frac{M_{y \max}}{a^2 q} \tag{41}$$

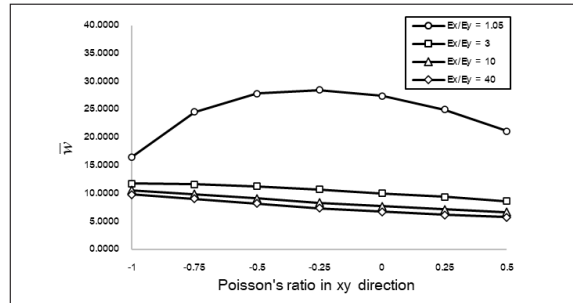
$$\overline{M_{xy}} = \frac{M_{xy \max}}{a^2 q} \tag{42}$$

จากรูปที่ 4 พบว่า เมื่อ  $E_x/E_y$  มีค่าน้อยค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นที่พิจารณาจะมีค่ามาก และการโก่งตัวจะลดลงเมื่อ  $E_x/E_y$  มากขึ้น ซึ่งเมื่อ  $E_x/E_y$  มีค่าใกล้เคียง 1 ค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกจะมีพฤติกรรมใกล้เคียงกับแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบไอโซทรอปิก [15] และเมื่อความหนาของแผ่นพื้นเพิ่มขึ้น ค่าการโก่งตัวก็จะลดลงเช่นเดียวกัน จากตารางที่ 5 พบว่า เมื่อค่า  $k_r$  มีค่าน้อยจนเท่ากับ 0 พฤติกรรมที่เกิดขึ้นของแผ่นพื้นดังกล่าว จะมีพฤติกรรมที่สอดคล้องกับกรณีแผ่นพื้นที่มีร่องรับธรรมดาแบบแข็ง และเมื่อค่า  $k_r$  มีค่ามากพฤติกรรมของแผ่นพื้นดังกล่าวจะมีความสอดคล้องกับกรณีแผ่นพื้นที่มีร่องรับแบบยึดแน่น ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎี ดังนั้น เงื่อนไขขอบเขตที่ร่องรับยึดหยุ่นแบบยึดรั้งที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ จึงสามารถจำลองที่ร่องรับให้มีพฤติกรรมระหว่างแบบธรรมดาและแบบยึดแน่นซึ่งมีความใกล้เคียงกับสภาพความเป็นจริงในโครงสร้าง

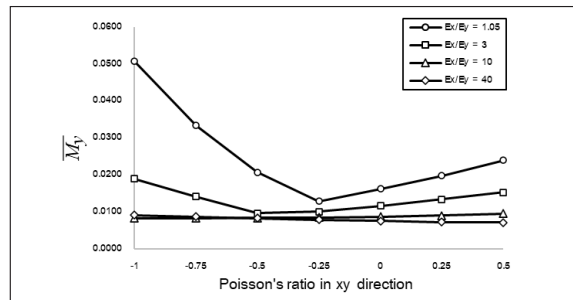
### 3.3 การวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกโดยวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาพฤติกรรมแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกที่มีอัตราส่วนปัวซองตั้งแต่ -1.0 ถึง 0.5 โดยใช้สูตรปรับแก้แรงเฉือนจากสมการที่ (5) และผลการวิเคราะห์ที่ได้จะแปลงให้เป็นคำตอบแบบไร้นิติตามสมการที่ (39)-(42)

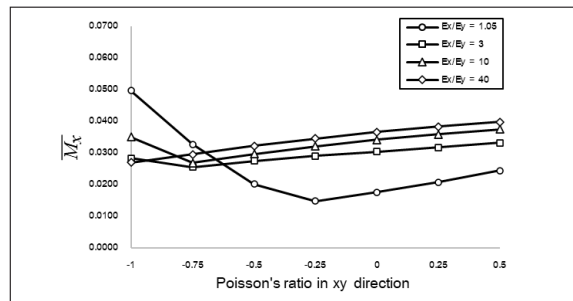
3.3.1 แผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเซติกแบบออร์โททรอปิก ขนาด 1 ตารางเมตร ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 1,000$  กิโลพาสคัล และมีที่รองรับแบบยึดแน่น โดยที่  $h = 0.2$  เมตร  $E_y = 1 \times 10^6$  กิโลพาสคัล  $G_{xy} = G_{xz} = 0.6 E_y$ ,  $G_{yz} = 0.5 E_y$ ,  $M = 625$  จุด  $N = 400$  เอลิเมนต์ โดยผลการวิเคราะห์แสดงดังรูปที่ 5



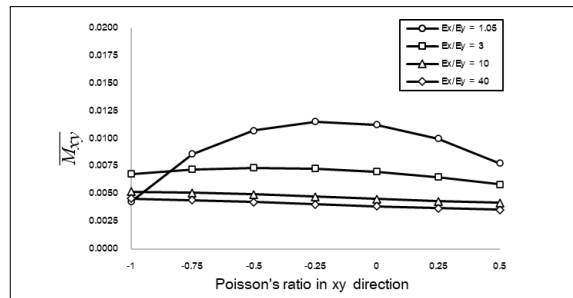
(ก) ค่าการโก่งตัวสูงสุด



(ข) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดในทิศทางแกน y



(ค) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดในทิศทางแกน x



(ง) ค่าโมเมนต์บิดสูงสุด

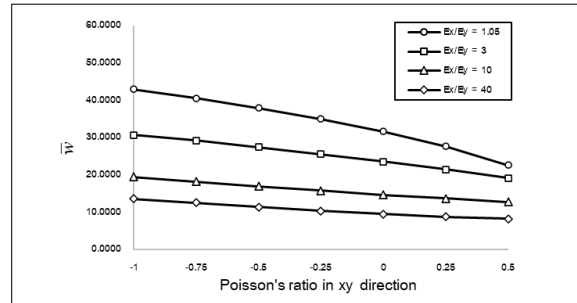
รูปที่ 5 ผลการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเซติกแบบออร์โททรอปิกโดยมีที่รองรับแบบยึดแน่น

3.3.2 แผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเซติกแบบ ออร์โททรอปิก ขนาด  $1 \times 1$  ตารางเมตร ภายใต้น้ำหนัก บรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 150$  กิโลพาสคัล และมีที่ รองรับธรรมดาแบบแข็ง (Hard Type) โดยที่  $h = 0.2$  เมตร  $E_y = 1 \times 10^6$  กิโลพาสคัล  $G_{xy} = G_{xz} = 0.6 E_y$ ,  $G_{yz} = 0.5 E_y$ ,  $M = 625$  จุด  $N = 400$  เอลิเมนต์ แสดงผลดังรูปที่ 6

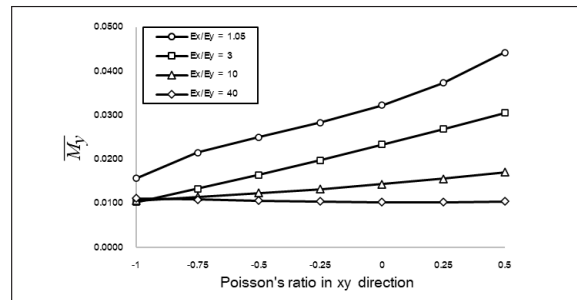
จากรูปที่ 5 และ 6 พบว่า เมื่อ  $E_x/E_y$  มีค่าใกล้เคียง 1 (คุณสมบัติของวัสดุมีความใกล้เคียงกับวัสดุประเภทไอโซทรอปิก) พฤติกรรมของแผ่นพื้นในช่วงออกเซติกกับในช่วงที่ไม่เป็น ออกเซติกจะมีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด โดยเฉพาะ รูปที่ 5 (ข)-(ค) และรูปที่ 6 (ข)-(ค) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่า โมเมนต์ดัดในทิศทางแกน  $x$  และแกน  $y$  สามารถลดลงได้เมื่อ วัสดุเป็นประเภทออกเซติก ดังนั้นจึงสามารถประยุกต์ใช้วัสดุ ออกเซติกกับโครงสร้างเพื่อลดค่าโมเมนต์ดัด ซึ่งจะนำไปสู่ค่า ความเค้นในแผ่นพื้นที่ลดลง ในขณะที่ เมื่อค่า  $E_x/E_y$  เพิ่มขึ้น ( $E_x/E_y = 3, 10, 40$ ) ค่าการโก่งตัวสูงสุด ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด และค่าโมเมนต์บิดสูงสุดที่เกิดขึ้นในช่วงออกเซติกกับในช่วงที่ ไม่เป็นออกเซติกจะมีความใกล้เคียงกันมากขึ้น

### 3.4 การวิเคราะห์แผ่นพื้นรูปร่างที่ซับซ้อนอื่นๆ

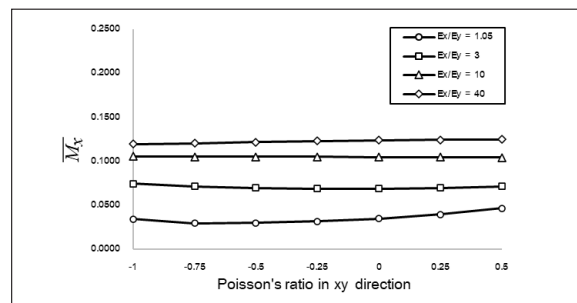
การวิเคราะห์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์จะไม่สามารถกระทำ ได้ในกรณีที่โครงสร้างแผ่นพื้นมีรูปร่างที่ซับซ้อน ในขณะที่ การใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์จำเป็นต้องแบ่งโดเมนของแผ่นพื้น ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งอาจทำได้ยุ่งยาก ในหัวข้อนี้จะ แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ที่ นำเสนอนี้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นหนาออกเซติก แบบออร์โททรอปิกที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อน โดยจะทำการตรวจสอบความแม่นยำโดยการเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ทำการวิเคราะห์ ด้วยโปรแกรม Ansys Workbench 18.2 โดยมีตัวอย่างการ วิเคราะห์ 2 รูปร่าง คือ แผ่นพื้นรูปร่างหกเหลี่ยมที่มีที่รองรับ แบบผสม และแผ่นพื้นรูปร่างสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีที่รองรับ แบบยึดแน่นแสดงดังรูปที่ 7 และ 8 ตามลำดับ โดยมีน้ำหนัก บรรทุกกระจายสม่ำเสมอ  $q = 10$  กิโลพาสคัล กระทำกับ แผ่นพื้น และ  $h/a = 0.1, 0.15, 0.2$ ,  $E_y = 1 \times 10^6$  กิโลพาสคัล



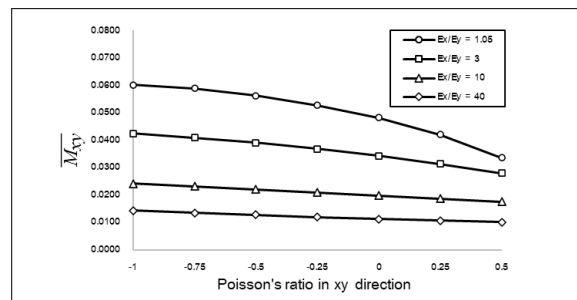
(ก) ค่าการโก่งตัวสูงสุด



(ข) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด ในทิศทางแกน  $y$

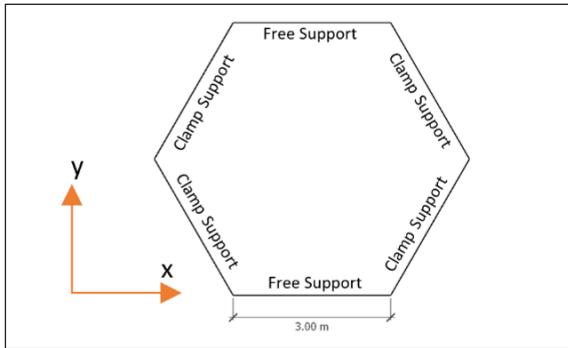


(ค) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด ในทิศทางแกน  $x$

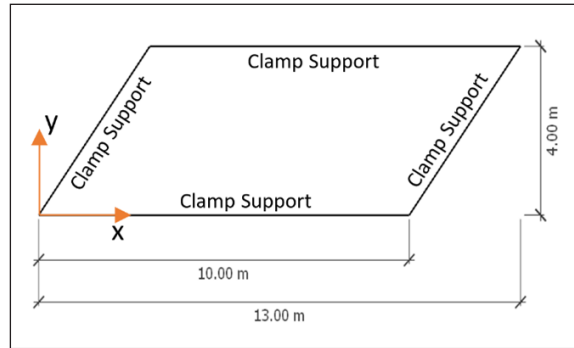


(ง) ค่าโมเมนต์บิดสูงสุด

รูปที่ 6 ผลการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเซติก แบบออร์โททรอปิกโดยมีที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง



รูปที่ 7 แผ่นพื้นหกเหลี่ยมที่มีคุณสมบัติของวัสดุตามที่กำหนดในหัวข้อที่ 3.4



รูปที่ 8 แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีคุณสมบัติของวัสดุตามที่กำหนดในหัวข้อที่ 3.4

$G_{xy} = G_{xz} = 0.6 E_y$ ,  $G_{yz} = 0.5 E_y$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = -0.25$  โดยแผ่นพื้นรูปร่างสี่เหลี่ยมด้านขนานจะกำหนด  $M = 625$  จุด  $N = 400$  เอลิเมนต์ และมีด้านที่ยาวที่สุด  $a = 10$  เมตร และแผ่นพื้นหกเหลี่ยมด้านเท่าจะกำหนด  $M = 561$  จุด  $N = 600$  เอลิเมนต์และมีด้านที่ยาวที่สุด  $a = 3$  เมตร โดยมีผลการวิเคราะห์แสดงดังตารางที่ 6 และ 7

ตารางที่ 6 ผลการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบ ออร์โททรอปิกรูปหกเหลี่ยม

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{h}{a}$	$w_{max}$ (mm)		Differences (%)
		Present	FEM	
3	0.1	2.3723	2.3901	0.7437
	0.15	0.7849	0.7798	0.6490
	0.2	0.3788	0.3705	2.2323
5	0.1	1.6908	1.6973	0.3848
	0.15	0.5842	0.5757	1.4847
	0.2	0.2949	0.2851	3.4343
7	0.1	1.3611	1.3541	0.5195
	0.15	0.4880	0.4751	2.7285
	0.2	0.2551	0.2433	4.8424

จากตารางที่ 6 และ 7 พบว่า คำตอบที่ได้จากงานวิจัยนี้ มีความสอดคล้องใกล้เคียงกับคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ แสดงให้เห็นว่าวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ตารางที่ 7 ผลการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบ ออร์โททรอปิกรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{h}{a}$	$w_{max}$ (mm)		Differences (%)
		Present	FEM	
3	0.1	0.1347	0.1291	4.3476
	0.15	0.0605	0.0595	1.5717
	0.2	0.0376	0.0398	5.5302
5	0.1	0.1320	0.1266	4.2386
	0.15	0.0594	0.0586	1.3893
	0.2	0.0370	0.0393	5.8067
7	0.1	0.1294	0.1241	4.3011
	0.15	0.0586	0.0578	1.3843
	0.2	0.0367	0.0390	5.8861

4. สรุป

งานวิจัยนี้เสนอการประยุกต์ใช้วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาที่พิจารณาการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือน โดยแผ่นพื้นหนาใช้วัสดุแบบออกเซติก กล่าวคือ อัตราส่วนปัวซองมีค่าเป็นลบ และมีพฤติกรรมแบบออร์โททรอปิก งานวิจัยนี้จะนำหลักการสมการแอนะล็อก ซึ่งจะสามารถแทนสมการควบคุมดั้งเดิมด้วยสมการปัวซองสามสมการ ภายใต้การกระทำจากแหล่งกำเนิดสมมติ โดยมีเงื่อนไขที่ขอบเขตเดิม ซึ่งจะทำให้ได้สมการอินทิกรัลที่ขอบเขต ดังนั้นจากกระบวนการวิธีที่นำเสนอจะมีการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะที่ขอบเขตของปัญหาเท่านั้น ซึ่งช่วยลดความยุ่งยากได้อย่างมากเมื่อเทียบกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ จาก

ผลการวิเคราะห์สามารถสรุปได้ดังนี้

1) คำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีบานดารีเอลิเมนต์ มีความสอดคล้องกับคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ แสดงให้เห็นว่าวิธีบานดารีเอลิเมนต์มีความแม่นยำและสามารถใช้ ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2) จากการพิจารณาผลกระทบเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ ของแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกด้วยวิธีบานดารีเอลิเมนต์พบว่า เมื่อค่า  $E_x/E_y$  มากขึ้นค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นจะลดลง และเมื่อค่า  $E_x/E_y$  มีค่าใกล้เคียง 1.0 ค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกจะมีความใกล้เคียงกับค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบไอโซทรอปิก และเมื่อความหนาของแผ่นพื้นมากขึ้นค่าการโก่งตัวจะลดลง

3) ในวิเคราะห์แผ่นพื้นโดยพิจารณาที่ค่าอัตราส่วนปัวซอง ตั้งแต่ -1.0 ถึง 0.5 พบว่า ยิ่งค่ามอดูลัสยืดหยุ่นในแต่ละทิศทางมีความแตกต่างกันมาก จะยิ่งส่งผลให้พฤติกรรมของแผ่นพื้นในช่วงออกเซติกกับในช่วงที่ไม่เป็นออกเซติกมีความใกล้เคียงกันมากขึ้น เมื่อพิจารณาค่าโมเมนต์ดัดในทิศทางแกน  $x$  และแกน  $y$  พบว่า สามารถลดลงได้เมื่อวัสดุเป็นประเภทออกเซติก ดังนั้นจึงสามารถประยุกต์ใช้วัสดุออกเซติกกับโครงสร้างเพื่อลดค่าโมเมนต์ดัด ซึ่งจะนำไปสู่การลดลงของความเค้นในแผ่นพื้น

4) ที่รองรับยืดหยุ่นแบบยึดรั้งสามารถจำลองแผ่นพื้นหนาออกเซติกแบบออร์โททรอปิกให้มีพฤติกรรมของที่รองรับอยู่ระหว่างที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง และที่รองรับแบบยึดแน่น ดังนั้นจึงสามารถจำลองที่รองรับให้ใกล้เคียงกับพฤติกรรมในการใช้งานจริงได้

5) คำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์แผ่นพื้นรูปร่างที่ซับซ้อนด้วยวิธีบานดารีเอลิเมนต์มีความสอดคล้องกับคำตอบจากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ แสดงให้เห็นว่าวิธีบานดารีเอลิเมนต์ในงานวิจัยนี้สามารถใช้ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นรูปร่างอื่นๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

## 5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนเงินทุนวิจัยและวิชาการ

ตามแผนกลยุทธ์เพื่อพัฒนาภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มจร. (CE-KMUTT 65016)

## เอกสารอ้างอิง

- [1] R. D. Mindlin, "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, no. 1, pp. 31–38, 1951.
- [2] J. T. Katsikadelis, "The analog equation method: A boundary-only integral equation method for nonlinear static and dynamic problems in general bodies," *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 27, pp. 13–38, 2002.
- [3] B. N. Pandya and T. Kant, "A refined higher-order generally Orthotropic  $C^0$  plate bending element," *Computers & Structures*, vol. 28, no. 2, pp. 119–133, 1988.
- [4] J. Wang and M. Huang, "Boundary Element Method for Orthotropic thick plates," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 7, no. 3, pp. 258–266, 1991.
- [5] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 2, pp. 69–77, 1945.
- [6] N. G. Babouskos and J. T. Katsikadelis, "Static analysis of thick layered Anisotropic plates with BEM," in *Proceedings 8th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Volos, Greece, 2015, pp. 12–15.
- [7] T. C. Lim, "Shear deformation in thick auxetic plates," *Smart Materials and Structures*, vol. 22, no. 8, Article ID 084001, 2013.
- [8] H. Chyanbin, *Anisotropic Elastic Plates*, Springer Science+Business Media, Heidelberg, 2010.



- [9] J. T. Katsikadelis, *The Boundary Element Method for Plate Analysis*, Elsevier, Kidlington, Oxford, 2014.
- [10] M. Greenberg, *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1971.
- [11] J. T. Katsikadelis, *The Boundary Elements Theory and Applications*, Elsevier, Kidlington, Oxford, 2002.
- [12] S. Bergman and M. Schiffer, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, Dover Publications, New York, 2013.
- [13] J. T. Katsikadelis, *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists Theory and Applications*, Elsevier, Kidlington, Oxford, 2016.
- [14] C. M. Wang, J. N. Reddy, and K. H. Lee, *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*, Elsevier Inc, Kidlington, Oxford, 2000.
- [15] T. C. Lim, *Auxetic Materials and Structures*, Springer Science+Business Media, Singapore, 2015.