บรรณาธิการปริทัศน์/Editorial Corner

แคลคูลัสควอนตัม
Quantum Calculus

เจษฎา ธารีบุญ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

Jessada Tariboon
Department of Mathematics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

*Corresponding Author, E-mail: jessada.t@sci.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.06.010

ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบัน ล้วนแล้วแต่มีคณิตศาสตร์อยู่เบื้องหลังทั้งสิ้น เห็นได้ชัดว่า หลังจากการค้นพบแคลคูลัสของเซอร์ ไอแซก นิวตัน (ค.ศ. 1643–1729) และกอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิทซ์ (ค.ศ. 1946–1719) นำไปสู่การค้นพบและอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติต่างๆ ซึ่งโดยสาระสำคัญของแคลคูลัส คือ การศึกษาการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนที่ ทำให้นักวิทยาศาสตร์สามารถอธิบายการตกลงสู่พื้นโลกของวัตถุ การทำงานของเครื่องจักรกล การไหลของของเหลว การขยายตัวของก๊าซ การเติบโตของพืชและสัตว์ รวมถึงการกวัดแกว่งของผลกำไร เป็นต้น

การศึกษาปรากฏการณ์ต่างๆ นั้น สามารถทำได้โดยการสร้างความสัมพันธ์ของสมการคณิตศาสตร์ หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แต่ในบางปรากฏการณ์ที่การวัดข้อมูลไม่สามารถวัดได้อย่างต่อเนื่อง ข้อมูลวิยุต (Discrete Data) เหล่านี้ ไม่สามารถนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญหรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ จึงทำให้นักคณิตศาสตร์พัฒนาแคลคูลัสขึ้นมาอีกสาขาหนึ่งเรียกว่า แคลคูลัสเชิงผลต่าง (Difference Calculus) ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลวิยุต โดยแบบจำลองดังกล่าวจะอยู่ในรูปของสมการผลต่างที่มีตัวแปรเวลาอยู่ในเซตของจำนวนเต็ม

แคลคูลัสควอนตัม (Quantum Calculus) หรือแคลคูลัสคิว (q-Calculus) นั้น ได้เริ่มต้นขึ้นเป็นครั้งแรกในการศึกษาอนุกรมไฮเปอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric series) ของ Euler (ค.ศ. 1798–1852) จากนั้นพัฒนาการช่วงแรกของสาขาวิชานี้ยังอยู่ที่งานด้านการหาสมบัติต่างๆ ของอนุกรมคิวโดย Gudermann (ค.ศ. 1798–1852), Weierstrass (ค.ศ. 1815–1897), Heaviside (ค.ศ. 1850–1925) เป็นต้น ต่อมาในปี ค.ศ. 1910 Jackson [1] ได้เป็นคนแรกที่ได้นำองค์ความรู้แคลคูลัสคิวของอนุกรมอนันต์มานิยามอนุพันธ์คิวและอินทิกรัลคิวเพื่อศึกษาสมการผลต่างคิว โดยเขาได้นิยามอนุพันธ์คิวของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$ ดังสมการที่ (1)

$$D_q f(t) = \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t} \tag{1}$$

การอ้างอิงบทความ: เจษฎา ธารีบุญ, "แคลคูลัสควอนตัม," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 30, ฉบับที่ 3, หน้า 361–363, ก.ค.–ก.ย. 2563.

โดยที่ $0 < q < 1$ และ $D_q f(0) = \lim_{t\to 0} D_q f(t)$ และได้นิยามอินทิกรัลจำกัดเขตคิวของฟังก์ชัน f ซึ่งอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ดังสมการที่ (2)

$$\int_0^t f(s)d_q s = (1-q)t\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i t) \tag{2}$$

ตัวอย่างสำหรับนิยามข้างต้น ถ้า $f(t) = t^2$ แล้ว $D_q t^2 = \dfrac{t^2 - q^2 t^2}{(1-q)t} = (1+q)t$ จะเห็นได้ว่าถ้า $q \to 1$ แล้วอนุพันธ์คิวของฟังก์ชัน $f(t) = t^2$ จะเป็นอนุพันธ์ปกติ คือ $f'(t) = 2t$ สำหรับกรณีเฉพาะของอนุพันธ์คิว เช่น $D_{\frac{1}{2}} t^2 = \dfrac{3}{2}t,\ D_{\frac{1}{8}} t^2 = \dfrac{4}{3}t$ เป็นต้น ต่อไปอินทิกรัลคิวของฟังก์ชัน $f(t) = t^2$ โดยใช้นิยาม (2) จะได้ดังสมการที่ (3)

$$\begin{aligned}\int_0^t s^2 d_q s &= (1-q)t\sum_{i=0}^{\infty} q^i (q^i t)^2 = (1-q)t^3 \sum_{i=0}^{\infty} (q^3)^i \\ &= \frac{(1-q)t^3}{1-q^3} = \frac{t^3}{1+q+q^2}\end{aligned} \tag{3}$$

จะเห็นได้ว่าถ้า $q \to 1$ แล้วอินทิกรัลคิวของฟังก์ชัน f จะเป็นอินทิกรัลปกติ คือ $\int_0^t s^2 ds = \dfrac{t^3}{3}$ กรณีเฉพาะสำหรับอินทิกรัลคิว เช่น $\int_0^t s^2 d_{\frac{1}{2}} s = \dfrac{4}{7}t^3,\ \int_0^t s^2 d_{\frac{1}{3}} s = \dfrac{9}{13}t^3$ เป็นต้น หลังจากที่ Jackson ได้สร้างสมการผลต่างคิวแล้วก็ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่ได้ศึกษาสมการผลต่างคิวต่อมา เช่น Carmichael [2], Mason [3], Adams [4], Trjitzinsky [5] เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 1930–1980 ผลของการศึกษาสมการผลต่างคิวนั้นยังไม่มีความคืบหน้ามากนัก จนกระทั่งประมาณปี ค.ศ. 1980 จึงเริ่มมีผลงานที่น่าสนใจของนักคณิตศาสตร์มาอีกครั้ง จากการศึกษาแคลคูลัสคิวในด้าน q-combinatorics, q-arithmetics, q-integrable system และ variational q-calculus [6] ทำให้เกิดความตื่นตัวในการศึกษาสาขาวิชานี้อีกครั้งอันเนื่องมาจาก มีการนำสมการผลต่างคิวไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ในทางฟิสิกส์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกลศาสตร์ควอนตัม เช่น Fock [7] ได้ศึกษาความสมมาตรของอะตอมไฮโดรเจนโดยใช้สมการผลต่างคิว ในปี ค.ศ. 1990 Raychev และคณะ [8] ได้นำสมการผลต่างคิวไปใช้ในการศึกษาโมเลกุลและฟิสิกส์นิวเคลียร์ ในปี ค.ศ. 1994 Cheng [9] ได้ศึกษาทฤษฎี Yang-Mills ซึ่งเป็นทฤษฎีที่อธิบายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ในสนามสัมพันธภาพทั่วไป และในปีเดียวกันนี้เอง Gavrilik [10] ได้ศึกษาฟิสิกส์ของอนุภาคมูลฐาน และเคมีคัลฟิสิกส์ (Elementary Particle Physics and Chemical Physics) โดยใช้สมการผลต่างคิว นอกจากนี้ Siegel [11] ยังได้ประยุกต์ผลของการศึกษาสมการผลต่างคิวในการศึกษาทฤษฎีสตริง (String Theory) เป็นต้น จวบจนปัจจุบันการศึกษาด้านแคลคูลัสคิวและสมการผลต่างคิวได้มีความก้าวหน้าไปอย่างมาก โดยนักคณิตศาสตร์ยังได้พัฒนาแคลคูลัสคิวเชิงเศษส่วนอีกด้วย [12], [13]

ในปี ค.ศ. 2012 เจษฎา ธารีบุญ ได้มองเห็นปัญหาของนิยามอนุพันธ์ของแคลคูลัสคิวในสมการที่ (1) ในกรณีที่เกิดปรากฏการณ์อิมพัลส์ดังนี้ ถ้าให้ t_1 เป็นจุดที่เกิดอิมพัลส์โดยที่ $qt < t_1 < t$ ซึ่งทำให้ $f(t_1^-) \neq f(t_1^+)$ เมื่อ $f(t_1^-)$ และ $f(t_1^+)$ เป็นลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวาของฟังก์ชัน f ที่จุด t_1 แล้วค่าของอนุพันธ์คิวที่ได้จากสมการที่ (1) มีความผิดพลาดจากผลของอิมพัลส์ จากการตรวจสอบผลงานวิจัยอย่างละเอียดทั่วโลกพบว่า ยังไม่มีนักคณิตศาสตร์คนใดสามารถสร้างสมการผลต่างคิวอิมพัลส์ ทั้งนี้ อันเนื่องมาจากปัญหาที่เกิดขึ้นกับนิยามของอนุพันธ์คิวนั่นเอง จนกระทั่งในวันที่ 20 พฤษภาคม ปี ค.ศ. 2013 [14] เขาได้คิดค้นนิยามใหม่ของอนุพันธ์คิวและอินทิกรัลจำกัดเขตคิวของฟังก์ชัน f บนช่วงจำกัดของฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วง $[t_k, t_{k+1}] \subset \mathrm{R}$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$D_{q_k} f(t) = \frac{f(t) - f(q_k t + (1-q_k)t_k)}{(1-q_k)(t-t_k)} \tag{6}$$

และ

$$\int_{t_k}^t f(s)\,{}_{t_k}d_{q_k} s = (1-q_k)(t-t_k)\sum_{i=0}^{\infty} q_k^i f(q_k^i t + (1-q_k^i)t_k) \tag{7}$$

ตามลำดับ จากนิยามข้างต้นพบว่าถ้า $t_k = 0$ และ $q_k = q$ อนุพันธ์คิวและอินทิกรัลคิวในสมการที่ (6) และ (7) จะถูกลดรูปไปเป็นสมการที่ (1) และ (2) ตามลำดับ จากนั้นเขาได้นำเสนอแนวคิดนี้เพื่อทำวิจัยร่วมกับ Sotiris และ Bashir ผู้ซึ่งมีความเชี่ยวชาญด้านสมการผลต่างคิวและสมการเชิงอนุพันธ์อิมพัลส์ จนกระทั่งประสบความสำเร็จในการสร้างแคลคูลัสคิวและได้สร้างสมการผลต่างคิวอิมพัลส์ของปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบได้เป็นครั้งแรกของโลก [15] และนี่ก็คือจุดเริ่มต้นของการวางรากฐานในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ด้านแคลคูลัสควอนตัมในประเทศไทย

เอกสารอ้างอิง

[1] H. F. Jackson, "q-Difference equations," *American Journal of Mathematics*, vol. 32, no. 4, pp. 305–314, 1910.

[2] R. D. Carmichael, "The general theory of linear q-difference equations," *American Journal of Mathematics*, vol. 34, no. 2, pp. 147–168, 1912.

[3] T. E. Mason, "On properties of the solution of linear q-difference equations with entire function coefficients," *American Journal of Mathematics*, vol. 37, no. 4, pp. 439–444, 1915.

[4] C. R. Adams, "On the linear ordinary q-difference equation," *Annals of Mathematics*, vol. 30, no. 2, pp. 195–205, 1929.

[5] W. J. Trjitzinsky, "Analytic theory of linear q-difference equations," *Acta Mathematica*, vol. 61, pp. 1–38, 1993.

[6] V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus. Springer-Verlag*, Springer, 2002.

[7] V. Fock, "Zur theorie des wasserstoffatoms," *Zeitschrift fur Physik*, vol. 98, no. 3–4, pp. 145–154, 1935.

[8] P. P. Raychev, R. P. Roussev, and Yu. F. Smirnov, "The quantum algebra $SU_q(2)$ and rotational spectra of deformed nuclei," *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 16, no. 8, pp. 137–141, 1990.

[9] H. Cheng, "Canonical quantization of Yang-Mills theories," *Perspectives in Mathematical Physics*, International press, 1994.

[10] A. M. Gavrilik, "q-Serre relations in and q-deformed meson mass sum rules," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 27, no. 3, pp. 91–94, 1994.

[11] W. Siegel, *Introduction to String Field Theory*. World Scientific Publishing Co., 1988.

[12] T. Ernst, *A Comprehensive Treatment of q-Calculus*. Birkhauser, 2012.

[13] M. H. Annaby and Z. S. Mansour, *q-Fractional Calculus and Equation*. Springer, 2012.

[14] J. Tariboon and S. K. Ntouyas, "Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations," *Advances in Difference Equations*, vol. 282, 2013.

[15] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, and J. Tariboon, "Quantum calculus: New concepts, impulsive IVPs and BVPs, inequalities," *Trends in Abstract and Applied Analysis*, vol. 4, Singapore: World Scientific, 2016.

รองศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ธารีบุญ
กองบรรณาธิการ