



ประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงปัวซองภายใต้ข้อมูลจากกระบวนการทำใหม่

พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย* และ โชติกา ราษีกุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 2564 4444 ต่อ 2100 อีเมล: spatchan@tu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2019.05.001

รับเมื่อ 5 มีนาคม 2562 แก้ไขเมื่อ 27 มีนาคม 2562 ตอรับเมื่อ 9 เมษายน 2562 เผยแพร่ออนไลน์ 22 พฤษภาคม 2562

© 2019 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

ข้อมูลเชิงนับพบได้ในหลากหลายสาขาวิชาตั้งแต่การแพทย์จนถึงสังคมศาสตร์ ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ย นักวิจัยมีแนวโน้มที่จะสมมติให้ข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับค่าเฉลี่ยและระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์ มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังเหตุผลที่เป็นไปได้ คือการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยนั้นง่ายและพบได้เกือบทุกโปรแกรมทางสถิติ อย่างไรก็ตาม หากข้อมูลเชิงนับนั้นมาจากกระบวนการทำใหม่แล้ว ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์ของข้อมูลเชิงนับอาจมีการแจกแจงแบบอื่นๆ ได้ ในงานวิจัยนี้จึงสนใจที่จะศึกษาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นที่ถูกสร้างขึ้นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงปัวซองทั้ง 7 วิธี แต่ให้ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงแกมมาหรือไวบูลซึ่งจะให้ข้อมูลจำนวนนับที่มีความแปรปรวนมากกว่าหรือน้อยกว่าค่าเฉลี่ย และยังคงศึกษาในกรณีที่จำนวนนับมาจากตัวแบบทวินามเชิงลบ ผลการศึกษาโดยสรุป พบว่าค่าของดัชนีวัดการกระจาย (ID) จะสามารถบอกประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นล่วงหน้าได้ โดยหาก ID มีค่าไม่เกิน 1 ช่วงความเชื่อมั่นทุกวิธีจะให้ค่าความน่าจะเป็นค้ำรวมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดซึ่งเท่ากับ 0.95 ในทางกลับกัน เมื่อ ID มีค่ามากกว่า 1 ช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมดให้ค่าความน่าจะเป็นค้ำรวมต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่ต้องการ นอกจากนี้ การเพิ่มขึ้นของขนาดตัวอย่างส่งผลต่อค่าความน่าจะเป็นค้ำรวมเพียงเล็กน้อย

คำสำคัญ: ช่วงความเชื่อมั่น, ค่าเฉลี่ย, การแจกแจงปัวซอง, กระบวนการทำใหม่



Performance of Confidence Intervals for Population Mean of Poisson Distribution with Data from the Renewal Process

Patchanok Srisuradetchai* and Chotika Rasikun

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Rangsit Campus, Pathum Thani, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0 2564 4444 Ext. 2100, E-mail: spatchan@tu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2019.05.001

Received 5 March 2019; Revised 27 March 2019; Accepted 9 April 2019; Published online: 22 May 2019

© 2019 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

Count data are commonly found in a wide range of disciplines from medical to social sciences. Regarding an interval estimation for a mean, researchers tend to assume that count data have a Poisson distribution, in which the mean and variance are equal and the interarrival time has an Exponential distribution. A plausible explanation is that the confidence interval for the Poisson mean is simpler to compute and readily found in virtually all statistical programs. However, when count data are generated from a renewal process, the interarrival time of count data can possess any distribution. This paper, therefore, aims to study the performance of seven confidence intervals constructed for the Poisson mean, provided interarrival time is set to be Gamma or Weibull distribution. Because of the given distributions, variance of count data shows to be either greater or smaller than the average. Count data generated from a negative Binomial model is also investigated. The findings show that the Index of Dispersion (*ID*) can be used to predict the performance of the confidence intervals. If *ID* is less than or equal to one, all confidence intervals produce the coverage probabilities greater than or equal to the desired confidence level (0.95). On the contrary, if *ID* is greater than one, the resulting coverage probabilities are lower than the desired confidence level. Moreover, an increase in the sample size is found to have a marginal effect on the coverage probability.

Keywords: Confidence Interval, Mean, Poisson Distribution, Renewal Process

Please cite this article as: P. Srisuradetchai and C. Rasikun, "Performance of confidence intervals for population mean of poisson distribution with data from the renewal process," *The Journal of KMUTNB*, vol. 29, no. 4, pp. 667–679, Oct.–Dec. 2019 (in Thai).

1. บทนำ

จำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งหรือขอบเขตหนึ่งที่น่าสนใจมีลักษณะข้อมูลจำนวนนับ (Count Data) เช่น จำนวนนักศึกษาที่เข้ามาใช้บริการในห้องสมุดต่อชั่วโมง จำนวนอุบัติเหตุทางจราจรที่เกิดขึ้นในแต่ละเดือน หรือจำนวนผู้ป่วยโรคมะเร็งที่เข้ารับการรักษาด้วยเคมีบำบัดที่โรงพยาบาลในระยะเวลาหนึ่งๆ ข้อมูลประเภทนี้พบได้แทบในทุกสาขาวิชาและนักวิจัยส่วนใหญ่มักมีพื้นฐานคิดว่าเป็นตัวแปรสุ่มปัวซอง (Poisson Random Variable) ที่มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังสมการที่ (1)

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

และ $\lambda > 0$ ซึ่งตัวแปรสุ่มปัวซองนี้มีคุณสมบัติ คือ ค่าเฉลี่ยเท่ากับค่าความแปรปรวนหรือมักเรียกว่า Equidispersion แต่ในการเก็บข้อมูลจริง สถานการณ์เช่นนี้อาจไม่จริงเพราะข้อมูลมักมีความแปรปรวนมากกว่าค่าเฉลี่ย ซึ่งนิยมเรียกกันในทางสถิติว่า Overdispersion ในทางกลับกันหากข้อมูลนั้นมีค่าความแปรปรวนน้อยกว่าค่าเฉลี่ยจะนิยมเรียกว่า Underdispersion การสมมติให้ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปัวซองอาจจะส่งผลให้การวิเคราะห์ที่มีความคลาดเคลื่อน เช่น ในการหาตัวแบบที่เหมาะสมของคะแนนจากการแข่งขันฟุตบอลทั้งหมดว่า ตัวแบบเชิงนับแบบไวบูลมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงมากกว่าตัวแบบปัวซอง [1] อย่างไรก็ตามก็ ตัวแบบปัวซองเป็นที่นิยมมากกว่าด้วยสาเหตุหลายประการ เช่น มีสูตรการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนและพบได้ในโปรแกรมทางสถิติทั่วไป เช่น โปรแกรม R และ SPSS เป็นต้น

ทางเลือกหนึ่งสำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลที่มีความแปรปรวนมากกว่าค่าเฉลี่ย คือ ใช้ตัวแบบทวินามเชิงลบ (Negative Binomial Model) ซึ่งมีคุณสมบัติที่ว่า ความแปรปรวนมากกว่าค่าเฉลี่ย นอกจากนี้ก็ยังประยุกต์ใช้กระบวนการรีนิวอล (Renewal Process) หรือเรียกว่ากระบวนการทำใหม่เข้ามาช่วยวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งสามารถกำหนดให้ระยะเวลาห่างเหตุการณ์หรือระยะเวลาที่รอคอยจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ (Inter-Arrival Time) มีการแจกแจง

แบบต่างๆ ตามที่คาดหมายได้ เช่น การแจกแจงไวบูล การแจกแจงแกมมา เป็นต้น กระบวนการทำใหม่นั้นเป็นกระบวนการสโตแคสติกประเภทหนึ่งที่มีระยะเวลาห่างเหตุการณ์มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งกระบวนการทำใหม่ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้แพร่หลาย เช่น ด้านการกำหนดนโยบายในการบำรุงรักษาและด้านความน่าเชื่อถือของอุปกรณ์ [2] กระบวนการทำใหม่ที่มีช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) อาจเรียกกระบวนการนี้ว่า “กระบวนการปัวซอง” (Poisson Process) [3] ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของกระบวนการทำใหม่

กำหนดระยะเวลาจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ที่ m สามารถเขียนให้อยู่ในรูปได้ดังสมการที่ (2)

$$a_m = \sum_{k=1}^m \tau_k, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

โดยที่ τ_k คือ ระยะเวลาห่างเหตุการณ์ที่ $k-1$ และ k ที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม คือ $F_m(t) = P(a_m \leq t)$ และให้ $N_t = N(t)$ เป็นตัวแปรสุ่ม แทน จำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ทั้งหมดในช่วงเวลา $[0, t)$ โดยที่ $P(N_t \leq m) = F_m(t)$ และ $P(N_t < m) = 1 - F_m(t)$ ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเกิด m เหตุการณ์ในช่วงเวลา $[0, t)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปได้ดังสมการที่ (3)

$$\begin{aligned} P_m(t) &\equiv P(N_t = m) \\ &= P(N_t \geq m) - P(N_t \geq m+1) \\ &= F_m(t) - F_{m+1}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

และกำหนด $F_0(t) = 1$ สำหรับทุกค่าของ t และ $F_1(t) = F(t)$ ดังนั้น $P_0(t) = F_0(t) - F(t) = 1 - F(t)$ โดยที่ $F_1(t)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงของระยะเวลาจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์แรกหรือเรียกว่า การแจกแจงของระยะเวลาทำใหม่แรก (First Inter-renewal Time) แต่หลังจากนั้นระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์จะมีการแจกแจง $F(t)$ ที่เหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน โดยเรียกว่า การแจกแจงทำใหม่ (Renewal Distribution) [4]

ซึ่งกระบวนการทำใหม่นั้นสามารถช่วยแก้ปัญหาข้อมูลที่มีความแปรปรวนมากหรือน้อยกว่าค่าเฉลี่ยได้ เช่น ตัวแบบเชิงนับแบบไวบูล (Weibull Count Model) [5] หรือตัวแบบเชิงนับแบบแกมมา (Gamma Count Model) [6] โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปตามลำดับได้ดังนี้

ตัวแบบเชิงนับแบบไวบูลดังสมการที่ (4)

$$P(N(t) = n) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^{j+n} (\lambda t^c)^j \alpha_j^n}{\Gamma(cj+1)}; n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

โดยที่

$$\alpha_j^0 = \Gamma(cj+1)/\Gamma(j+1), j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha_j^{n+1} = \sum_{m=n}^{j-1} \alpha_m^n \Gamma(cj - cm + 1) / \Gamma(j - m + 1), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$j = n+1, n+2, \dots$$

และตัวแบบเชิงนับแบบแกมมาดังสมการที่ (5)

$$P(N(t) = n) = e^{-\beta t} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\beta t)^{\alpha n+i}}{(\alpha n+i)!}; n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

โดยที่ $\alpha > 0$ คือ พารามิเตอร์บ่งชี้รูปร่าง (Shape Parameter) และ $\beta > 0$ คือ พารามิเตอร์บ่งชี้ตำแหน่ง (Scale Parameter) ตัวแบบเชิงนับทั้งสองนี้ไม่เป็นที่ยอมรับเนื่องจากมีความซับซ้อนในการคำนวณ จนกระทั่งในปี 2016 Kharrat *et al.* [4] ได้นำเสนอฟังก์ชันในโปรแกรม R ที่มีชื่อว่า Renewal Count ซึ่งอยู่ในแพ็คเกจ CountR โดยฟังก์ชันดังกล่าวนี้สามารถประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบเชิงนับแบบไวบูลและแกมมาได้ อย่างไรก็ตาม ปัญหาที่สำคัญของข้อมูลจำนวนนับ คือ ค่าเฉลี่ยซึ่งฟังก์ชัน Renewal Count ไม่ได้ให้ค่าประมาณพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยถึงแม้จะทราบค่าประมาณของพารามิเตอร์ในการนำไปคำนวณต่อในสมการที่ (4) หรือ (5) ก็มีใช้เรื่องง่ายนักจากการทบทวนวรรณกรรมเองทางด้านตัวแบบเชิงนับแบบแกมมาหรือไวบูลยังไม่พบช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย ทั้งนี้อาจเป็นเพราะสมการที่ (4) และ (5) ไม่อยู่ในรูปปิด (Closed Form)

สำหรับช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของจำนวนนับเมื่อสมมติให้ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปัวซองซึ่งก็คือให้ระยะเวลา

ระหว่างเหตุการณ์เป็นตัวแปรสุ่มแบบเลขชี้กำลังนั้นได้มีผู้ศึกษาไว้อยู่มากมายโดยมักมีเกณฑ์การพิจารณาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น คือ ค่าความน่าจะเป็นคัมรวม (Coverage Probability; CP) และค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length; AL) ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงปัวซองมีหลายวิธีด้วยกัน โดยวิธีที่รู้จักและนิยมใช้กันทั่วไป คือ วิธีวัลด์ ซึ่งจะใช้ได้ดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่เนื่องจากวิธีนี้ทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem; CLT) [7]

ในปี 1995 Winkelmann [6] เป็นคนแรกที่ได้แนะนำเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับประโยชน์ของตัวแบบกระบวนการทำใหม่ และได้มีการนำเสนอตัวแบบเชิงนับที่ขึ้นอยู่กับช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์ที่มีการแจกแจงแกมมา และในปี 2008 McShane *et al.* [5] ได้นำเสนอสูตรความน่าจะเป็นของตัวแบบเชิงนับภายใต้ข้อมูลจากกระบวนการทำใหม่ที่ขึ้นอยู่กับช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์แบบไวบูล โดยใช้การกระจายของอนุกรม (Series Expansion) เข้ามาช่วยในการหาค่า

Barker [8] ได้ทำการศึกษเปรียบเทียบการประมาณค่าแบบช่วงของค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงปัวซองในกรณีที่ค่าเฉลี่ยมีค่าไม่เกิน 5 โดยเปรียบเทียบทั้งหมด 9 วิธี ได้แก่ 1) วิธีช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald) 2) วิธีช่วงความเชื่อมั่นของวัลด์แบบปรับปรุง (Modified Wald) 3) วิธีช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ที่มีการปรับค่าแบบต่อเนื่อง (Wald with Continuity Correction) 4) วิธีของสกอร์ 5) วิธีการแปลงข้อมูลที่ทำให้ความแปรปรวนคงที่ 6) วิธีการแปลงข้อมูลที่ทำให้ความแปรปรวนคงที่แบบปรับปรุง 7) วิธีของ RVS 8) วิธีฟรีแมนและทูกีย์ และ 9) วิธีที่แท้จริง (Exact Method) ซึ่งจากผลการศึกษาพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริงนั้นให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมใกล้เคียงกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงกลับมากกว่าวิธีอื่นๆ

Tanusit [9] ได้ทำการศึกษเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงปัวซอง โดยศึกษาทั้งหมด 7 วิธี จากผลการศึกษาพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

ที่กำหนดเล็กน้อย แต่มีความยาวเฉลี่ยของช่วงน้อยที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 30$) ซึ่งผลการศึกษาแนะนำให้ใช้ช่วงความเชื่อมั่นแบบสกออร์สำหรับตัวอย่างขนาดเล็กและใช้ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่เพื่อความแม่นยำที่ถูกต้อง

Manad [10] ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นของ AWC (Adding the Tail Probability of the Wald Confidence Interval) ที่ได้จากการปรับปรุงของช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปัวซอง โดยเพิ่มความน่าจะเป็นตรงหางเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก กล่าวคือ $z_{\alpha/2}^2/2n$ และเปรียบเทียบกับช่วงความเชื่อมั่นแบบสกออร์ ช่วงความเชื่อมั่นของสกออร์แบบปรับปรุง ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ที่มีการปรับค่าแบบต่อเนื่องแล้ว พบว่า ช่วงใหม่ที่ได้พัฒนาขึ้นจะมีประสิทธิภาพที่ดีเมื่อมีค่าเฉลี่ยน้อยๆ และมีขนาดตัวอย่างเล็กถึงปานกลาง นอกจากนี้ยังง่ายต่อการคำนวณและค่าสังเกตตัวอย่างควรจะมาจากการแจกแจงปัวซอง

Guan [11] ได้เสนอการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นแบบสกออร์และเปรียบเทียบกับช่วงความเชื่อมั่นแบบสกออร์ดั้งเดิม พบว่า ความน่าจะเป็นคุ้มครองเข้าใกล้กับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดมากกว่าวิธีของสกออร์ดั้งเดิม ซึ่งวิธีที่ปรับปรุงนี้เหมาะสำหรับในกรณีที่มีค่าเฉลี่ยมีขนาดปานกลาง

ในความเป็นจริงแล้ว นักสถิติจะไม่มีทางทราบข้อมูลนั้นมีช่วงเวลาหรือระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์ว่าการแจกแจงเป็นแบบใด หากมีการแจกแจงแกมมาหรือไวบูลแล้วช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงปัวซองซึ่งมีการแจกแจงของระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์เป็นแบบเลขชี้กำลังจะยังใช้ได้หรือไม่ ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงปัวซองนี้สามารถพบได้ในทุกโปรแกรมหลักๆ ทางสถิติและมีการคำนวณที่ง่าย นักวิเคราะห์ส่วนมากจึงถือว่าข้อมูลจำนวนนับดังกล่าวมีระยะเวลาหรือเหตุการณ์เป็นแบบเลขชี้กำลัง ในงานวิจัยนี้จึงมุ่งหมายที่จะศึกษาประสิทธิภาพของการใช้ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยที่สร้างภายใต้การแจกแจงปัวซองสำหรับข้อมูลที่มาจากระบบการทำให้ใหม่ที่ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงไวบูล การแจกแจงแกมมาและยังศึกษากรณีที่มีข้อมูลเชิงนับมาจาก

การแจกแจงทวินามเชิงลบ (Negative Binomial) และปัวซอง โดยช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมดที่ศึกษามี 7 วิธี ได้แก่ 1) วิธีช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ 2) วิธีช่วงความเชื่อมั่นของวัลด์แบบปรับปรุง 3) วิธีของสกออร์ 4) วิธีของสกออร์แบบปรับปรุง 5) วิธีการเพิ่มปลายหางของวัลด์ 6) วิธีแบบเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนแบบเอกรูป (Uniform Prior) และ 7) วิธีเจฟเฟรย์ (Jeffreys Method) นอกจากนี้ยังศึกษาค่าของดัชนีวัดการกระจายที่น่าจะส่งผลต่อประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นและอาจใช้คาดเดาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นได้ล่วงหน้าได้

2. ดัชนีวัดการกระจาย

กำหนดให้ $\tau_k, k=1,2,3,\dots$ เป็นตัวแปรสุ่มแทน ระยะเวลา ระหว่างเหตุการณ์ $(k-1)$ และ k ที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $1/\lambda$ หรือ $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} P(N_i = 0) &= P(N_i \geq 0) - P(N_i \geq 1) \\ &= P(a_0 \leq t) - P(a_1 \leq t) = 1 - P(a_1 \leq t) \\ &= P(a_1 > t) = P(\tau_1 > t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} P(N_i = m) &= P(N_i \geq m) - P(N_i \geq m+1) \\ &= P(a_m \leq t) - P(a_{m+1} \leq t) = P\left(\sum_{k=1}^m \tau_k \leq t\right) - P\left(\sum_{k=1}^{m+1} \tau_k \leq t\right) \\ &= \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

โดยที่ $\sum_{k=1}^m \tau_k$ และ $\sum_{k=1}^{m+1} \tau_k$ มีการแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์รูปร่างเป็น m และ $m+1$ ตามลำดับและมีพารามิเตอร์อัตรา (Rate) เท่ากันเท่ากับ λ จึงสรุปได้ว่า หากระยะเวลาหรือเหตุการณ์มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังแล้ว N_i จะมีการแจกแจงปัวซองที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = \lambda t$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = \mu$ จะได้ว่า $\sigma^2/\mu = 1$ แล้วเรียก σ^2/μ ว่า ดัชนีวัดการกระจาย (Index of Dispersion; ID) หากข้อมูลเกิดปัญหา Overdispersion หรือ $\sigma^2 > \mu$ จะได้ว่า $ID > 1$ และเมื่อข้อมูลเกิดปัญหา



Underdispersion หรือ $\sigma^2 < \mu$ จะได้ว่า $ID < 1$ [12] ดัชนี ID เป็นดัชนีที่สำคัญในการตัดสินใจว่าช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงปัวซองนั้นเหมาะสมหรือไม่

3. วิธีการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงปัวซอง โดยมีขั้นตอนหลักๆ เป็นดังนี้

1. สุ่มตัวอย่างโดยใช้เทคนิคการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบคืนที่ (Simple Random Sampling with Replacement) ขนาด 15, 25, 50, 100 และ 200 จากประชากรจำนวนนับขนาด $N = 100,000$ (ซึ่งถือว่าแทน ประชากรที่มีจำนวนอนันต์) ที่มี

1.1 ช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่ทำให้จำนวนนับมีค่าเฉลี่ย $\mu = 1, 3, 5$ และ 10 เนื่องจากเป็นกระบวนการปัวซองค่า ID จึงมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

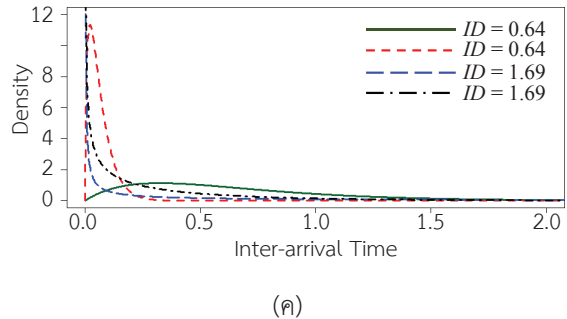
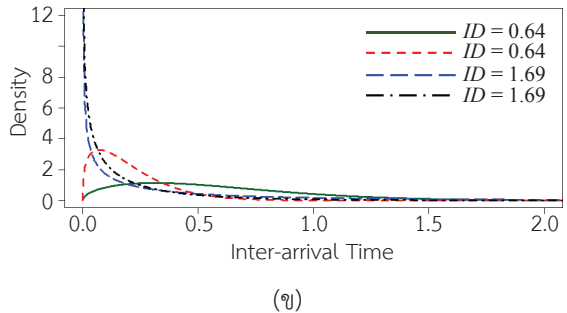
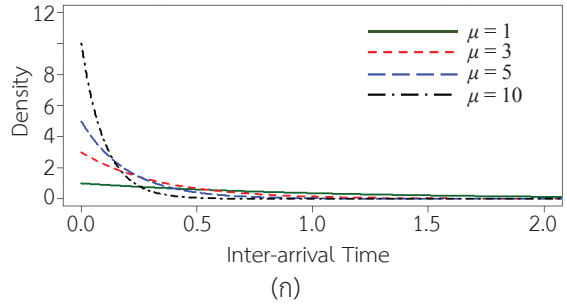
1.2 ช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงไวบูลที่ทำให้จำนวนนับมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 เป็น $(\mu, \sigma^2) = (1.42, 0.91), (5.87, 3.76), (2.51, 4.24), (5.11, 8.64)$ โดย 2 คู่แรกมีค่า ID เท่ากับ 0.64 และ 1.69 สำหรับ 2 คู่หลัง

1.3 ช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงแกมมาที่ทำให้จำนวนนับมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 เป็น $(\mu, \sigma^2) = (1.29, 0.82), (15.43, 9.88), (0.88, 1.48), (3.61, 6.10)$ โดย 2 คู่แรกมีค่า ID เท่ากับ 0.64 และ 1.69 สำหรับ 2 คู่หลัง

1.4 มาจากการแจกแจงทวินามเชิงลบที่มี $(\mu, \sigma^2) = (2, 3.38), (1.04, 1.76)$ โดยทั้ง 2 คู่มีค่า ID เท่ากันเท่ากับ 1.69 ทั้งนี้ การแจกแจงทวินามเชิงลบจะมี $\sigma^2 > \mu$ เสมอ

สำหรับรูปร่างการแจกแจงของช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์แสดง ดังรูปที่ 1 จะสังเกตว่า ในงานวิจัยนี้ได้มีการกำหนดให้ ID มีค่าที่เท่ากันแต่ความแปรปรวนและค่าเฉลี่ยแตกต่างกันเพื่อแสดงความสำคัญของ ID

2. คำนวนช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าเฉลี่ยด้วยวิธีทั้งหมด 7 วิธี ดังนี้



รูปที่ 1 การแจกแจงของช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์แบบเลขชี้กำลัง (ก) แจงไวบูล (ข) แกมมา (ค)

2.1 วิธีวัลด์ ซึ่งเป็นวิธีที่รู้จักและนิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย ช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ μ เป็น

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

โดยที่ $z_{\alpha/2}$ แทน ควอนไทล์ที่ $(1 - \alpha/2)$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน [7]

2.2 วิธีวัลด์ที่มีการปรับค่าแบบต่อเนื่อง (Wald's Method with Continuity Correction; WCC) จะให้ช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ μ เป็น [8]

พัทธ์ชนก ศรีสุระเดชชัย และ โชติกา ราษีกุล, “ประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงปัวซองภายใต้ข้อมูลจากกระบวนการทำใหม่.”

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x} + 0.5}{n}}$$

2.3 วิธีของสกอร์ (Score Method; SC) จะให้ช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ μ เป็น [11]

$$\left(\bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \right) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x} + z_{\alpha/2}^2 / (4n)}{n}}$$

2.4 วิธีของสกอร์แบบปรับปรุง (Moved Score Method; MSC) จะให้ช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ μ เป็น [11]

$$\left(\bar{x} + \frac{0.46z_{\alpha/2}^2}{n} \right) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x} + z_{\alpha/2}^2 / (4n)}{n}}$$

2.5 วิธีการเพิ่มปลายหางของวิลด์ (AWC) ซึ่ง Manad [10] ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ μ เป็น

$$\left(\bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \right) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

2.6 วิธีแบบเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนแบบเอกรูป เมื่อกำหนดให้การแจกแจงก่อนสำหรับพารามิเตอร์ μ มีการแจกแจงเอกรูปจะทำให้ช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ μ เป็น $CI_U = [L_U(x), U_U(x)]$ โดยที่ $L_U(x)$ คือควอนไทล์ที่ $\alpha/2$ และ $U_U(x)$ คือ ควอนไทล์ที่ $1 - \alpha/2$ ของ Gamma $(X + 1, 1/n)$ [13]

2.7 วิธีแบบเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนแบบเจฟเฟอรี (Jeffreys) คือ ให้การแจกแจงก่อนสำหรับพารามิเตอร์ μ ของการแจกแจงปัวซองเป็นการแจกแจงแกมมา $\mu/X \sim \text{Gamma}(X + 1/2, 1/n)$ ดังนั้น จะได้ว่าช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของ μ เป็น $CI_J = [L_J(x), U_J(x)]$ โดยที่ $L_J(x)$ คือ ควอนไทล์ที่ $\alpha/2$ และ $U_J(x)$ คือ ควอนไทล์ที่ $1 - \alpha/2$ ของ Gamma $(X + 1/2, 1/n)$ [13]

3. วัดประสิทธิภาพ (Performance) จะพิจารณาจากความสามารถของช่วงความเชื่อมั่นว่า คลุมค่าเฉลี่ยของประชากรได้หรือไม่ ซึ่งสามารถประมาณได้โดยใช้ความน่าจะเป็นคู่รวม

(CP) โดยการจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) ซึ่งกำหนดการทำการซ้ำ 50,000 รอบ โดยค่า CP ประมาณได้จากสูตร $CP = \sum_{i=1}^{50,000} I_{(L_i, U_i)}(\mu) / 50,000$, $i = 1, 2, \dots, 50,000$ โดยที่ $I_{(L_i, U_i)}(\mu)$ แทน ฟังก์ชันบ่งชี้ (Indicator Function) จะมีค่าเป็น 1 ในรอบที่ i ก็ต่อเมื่อค่าเฉลี่ยที่แท้จริงตกอยู่ในช่วงของขอบเขตล่าง L_i และขอบเขตบน U_i มิฉะนั้นจะเท่ากับ 0

4. คำนวณค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละวิธี ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสูตร

$$AL = \frac{\sum_{i=1}^{50,000} (U_i - L_i)}{50,000}, i = 1, 2, \dots, 50,000$$

5. พิจารณาว่าค่าความน่าจะเป็นคู่รวมที่ได้ในขั้นที่ 3) เท่ากับ 0.95 หรือไม่ Rohde [14] ได้นิยามช่วงความเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ไว้ว่า

$$P(L(X) < \mu < U(X)) \geq 1 - \alpha$$

ดังนั้น จะนำค่าประมาณความน่าจะเป็นคู่รวมที่ได้มาทดสอบสมมติฐานที่ α มีค่าเท่ากับ 0.05 สำหรับ $H_0: 1 - \alpha \geq 0.95$ และ $H_1: 1 - \alpha < 0.95$ โดยเมื่อคำนวณพบว่า จะปฏิเสธสมมติฐานว่างก็ต่อเมื่อ

$$CP > 0.95 - z_{0.95} \sqrt{\frac{0.95(0.05)}{50,000}} \approx 0.9484$$

ดังนั้น หากวิธีใดให้ $CP \geq 0.9484$ แสดงว่า วิธีการประมาณแบบช่วงดังกล่าวนี้มีประสิทธิภาพดีภายใต้สถานการณ์ที่ศึกษา

4. ผลการวิจัย

เมื่อระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังซึ่งจะทำให้จำนวนนับ (ที่มาจากการบวกรวมการปัวซอง) มี ID เท่ากับ 1 เสมอ ผลการศึกษาสรุปในตารางที่ 1 พบว่า ช่วงเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี ให้ค่าความน่าจะเป็นคู่รวมใกล้เคียงกับ

0.948 มากหรืออาจต่ำกว่าเพียงเล็กน้อยแต่ไม่เกิน 0.01 ($CP \geq 0.938$) ยกเว้นเพียงสถานการณ์เดียว คือ ช่วงความเชื่อมั่นวิธี Wald ที่มี $n = 15, \mu = 1$ ค่า CP มีค่าประมาณ 0.9196 เท่านั้น ข้อสังเกตอย่างหนึ่ง คือ ขนาดตัวอย่าง n ที่ศึกษาและค่าเฉลี่ย μ ส่งผลต่อค่า CP เล็กน้อย โดยหาก μ มีค่าน้อย n ควรจะมีขนาดใหญ่เพื่อให้ CP มีค่าใกล้เคียง 0.95 นอกจากนี้ n ยังส่งผลให้ความยาวเฉลี่ยของช่วง (AL) ซึ่งจะมีค่าลดลงหาก n มีค่าเพิ่มมากขึ้น และหากเปรียบเทียบวิธี พบว่า วิธี WCC เป็นวิธีที่ให้ CP สูงกว่าวิธีอื่นๆ และเมื่อค่าเฉลี่ย μ เพิ่มมากขึ้น CP ก็จะลดลงเข้าใกล้ 0.95 มากขึ้น เช่น เมื่อ $n = 25$ และค่า μ เท่ากับ 1, 3, 5, และ 10 จะมีค่า CP เท่ากับ 0.9832, 0.9644, 0.9571 และ 0.9525 ตามลำดับ

สำหรับกรณีที่ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงไวบูลที่มี $(\mu, \sigma^2) = (1.42, 0.91), (5.87, 3.76)$ ทั้ง 2 สถานการณ์มีค่า ID เท่ากับ 0.64 พบว่าทั้ง 7 วิธี ในช่วงที่มี CP มากกว่า 0.95 ทั้งหมดคือ มากกว่า 0.98

โดยผลการจำลองสรุปดังในตารางที่ 2 และในกรณีที่มี $(\mu, \sigma^2) = (2.51, 4.24), (5.11, 8.64)$ ทั้ง 2 สถานการณ์นี้มีค่า ID เท่ากับ 1.69 จะพบว่าในทุกวิธีมีค่า CP ต่ำกว่า 0.95 โดยวิธี WCC มีแนวโน้มที่ให้ค่า CP สูงกว่าวิธีอื่นๆ แต่มีความยาวเฉลี่ยของช่วงมากเช่นกัน โดยผลการจำลองสรุปดังในตารางที่ 3

เมื่อระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงแกมมาที่มี $(\mu, \sigma^2) = (1.29, 0.82), (15.43, 9.88)$ จะมีค่า ID เท่ากันเท่ากับ 0.64 แล้วค่า CP จากการจำลองมีค่ามากกว่า 0.95 ในทุกวิธี โดยผลการจำลองสรุปดังในตารางที่ 4 และเมื่อกำหนด $(\mu, \sigma^2) = (0.88, 1.48), (3.61, 6.10)$ จะได้ค่า ID เท่ากันเท่ากับ 1.69 แล้วค่า CP ต่ำกว่า 0.95 ในทุกวิธี โดยผลการจำลองสรุปดังในตารางที่ 5 แนวโน้มยังคงเหมือนกับกรณีที่ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงไวบูลวิธี WCC มีแนวโน้มที่ให้ค่า CP สูงกว่าวิธีอื่นๆ แต่ความยาวเฉลี่ยของช่วงก็มากเช่นกัน

ตารางที่ 6 สรุปค่าความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงสำหรับจำนวนนับที่มาจากแจกแจงทวินามเชิงลบซึ่งจะมีค่า ID มากกว่า 1 เสมอ พบว่าวิธี WCC มีค่า CP สูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างแต่ยังคงน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.95

ตารางที่ 1 ความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี เมื่อช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ($ID = 1$)

ความน่าจะเป็นคัมรวม (ความยาวเฉลี่ย)					
กรณีประชากรมี $\mu = \sigma^2 = 1$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9196 (1.003)	0.9450 (0.779)	0.9459 (0.553)	0.9429 (0.391)	0.9498 (0.277)
WCC	0.9801 (1.234)	0.9832 (0.958)	0.9814 (0.678)	0.9828 (0.480)	0.9835 (0.339)
SC	0.9503 (1.035)	0.9425 (0.795)	0.9412 (0.558)	0.9473 (0.393)	0.9467 (0.278)
MSC	0.9503 (1.035)	0.9425 (0.795)	0.9412 (0.558)	0.9473 (0.393)	0.9467 (0.278)
AWC	0.9503 (1.003)	0.9425 (0.779)	0.9412 (0.553)	0.9473 (0.391)	0.9467 (0.277)
Uniform	0.9503 (1.031)	0.9425 (0.792)	0.9412 (0.557)	0.9473 (0.393)	0.9467 (0.277)
Jeffreys	0.9635 (1.014)	0.9533 (0.785)	0.9498 (0.555)	0.9473 (0.392)	0.9467 (0.277)
กรณีประชากรมี $\mu = \sigma^2 = 3$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9465 (1.749)	0.9526 (1.358)	0.9450 (0.960)	0.9500 (0.679)	0.9511 (0.480)
WCC	0.9632 (1.891)	0.9644 (1.467)	0.9627 (1.037)	0.9673 (0.734)	0.9643 (0.519)
SC	0.9550 (1.768)	0.9500 (1.366)	0.9489 (0.963)	0.9507 (0.681)	0.9496 (0.481)
MSC	0.9458 (1.768)	0.9500 (1.366)	0.9489 (0.963)	0.9507 (0.681)	0.9496 (0.481)
AWC	0.9458 (1.749)	0.9500 (1.358)	0.9489 (0.960)	0.9507 (0.679)	0.9496 (0.480)
Uniform	0.9550 (1.765)	0.9500 (1.365)	0.9489 (0.963)	0.9507 (0.680)	0.9496 (0.481)
Jeffreys	0.9458 (1.756)	0.9600 (1.361)	0.9489 (0.961)	0.9505 (0.680)	0.9496 (0.481)

ตารางที่ 1 ความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี เมื่อช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ($ID = 1$) (ต่อ)

กรณีประชากรมี $\mu = \sigma^2 = 5$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9428 (2.262)	0.9469 (1.754)	0.9480 (1.241)	0.9501 (0.877)	0.9497 (0.621)
WCC	0.9570 (2.372)	0.9571 (1.839)	0.9624 (1.301)	0.9594 (0.920)	0.9596 (0.651)
SC	0.9518 (2.276)	0.9518 (1.760)	0.9499 (1.243)	0.9507 (0.878)	0.9504 (0.621)
MSC	0.9518 (2.276)	0.9518 (1.760)	0.9499 (1.243)	0.9507 (0.878)	0.9504 (0.621)
AWC	0.9518 (2.262)	0.9518 (1.754)	0.9499 (1.241)	0.9507 (0.877)	0.9504 (0.621)
Uniform	0.9518 (2.274)	0.9518 (1.759)	0.9499 (1.243)	0.9507 (0.878)	0.9504 (0.621)
Jeffreys	0.9518 (2.267)	0.9518 (1.756)	0.9494 (1.241)	0.9507 (0.878)	0.9523 (0.621)
กรณีประชากรมี $\mu = \sigma^2 = 10$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9539 (3.198)	0.9525 (2.479)	0.9509 (1.753)	0.9497 (1.240)	0.9505 (0.877)
WCC	0.9539 (3.278)	0.9525 (2.540)	0.9559 (1.796)	0.9547 (1.270)	0.9561 (0.898)
SC	0.9514 (3.209)	0.9505 (2.483)	0.9521 (1.754)	0.9502 (1.240)	0.9504 (0.877)
MSC	0.9514 (3.209)	0.9505 (2.483)	0.9521 (1.754)	0.9502 (1.240)	0.9504 (0.877)
AWC	0.9514 (3.198)	0.9505 (2.479)	0.9521 (1.753)	0.9502 (1.240)	0.9504 (0.877)
Uniform	0.9514 (3.207)	0.9505 (2.483)	0.9521 (1.754)	0.9502 (1.240)	0.9504 (0.877)
Jeffreys	0.9514 (3.202)	0.9505 (2.480)	0.9521 (1.753)	0.9502 (1.240)	0.9518 (0.877)

ตารางที่ 2 ความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี เมื่อช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงไวบูลที่มี $ID = 0.64$

ความน่าจะเป็นค้ำรวม (ความยาวเฉลี่ย)					
กรณีประชากรมี $\mu = 1.42, \sigma^2 = 0.91$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9844 (1.200)	0.9822 (0.931)	0.9818 (0.659)	0.9817 (0.466)	0.9858 (0.330)
WCC	0.9933 (1.399)	0.9955 (1.084)	0.9951 (0.767)	0.9947 (0.542)	0.9963 (0.384)
SC	0.9863 (1.228)	0.9886 (0.943)	0.9865 (0.663)	0.9832 (0.468)	0.9865 (0.330)
MSC	0.9863 (1.228)	0.9886 (0.943)	0.9865 (0.663)	0.9855 (0.468)	0.9865 (0.330)
AWC	0.9863 (1.200)	0.9841 (0.931)	0.9865 (0.659)	0.9832 (0.466)	0.9865 (0.330)
Uniform	0.9863 (1.224)	0.9886 (0.941)	0.9865 (0.663)	0.9832 (0.467)	0.9865 (0.330)
Jeffreys	0.9863 (1.210)	0.9839 (0.935)	0.9865 (0.661)	0.9855 (0.467)	0.9865 (0.330)
กรณีประชากรมี $\mu = 5.87, \sigma^2 = 3.76$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9841 (2.449)	0.9850 (1.898)	0.9860 (1.342)	0.9853 (0.949)	0.9850 (0.671)
WCC	0.9892 (2.551)	0.9888 (1.978)	0.9897 (1.399)	0.9890 (0.989)	0.9888 (0.699)
SC	0.9866 (2.462)	0.9866 (1.905)	0.9859 (1.345)	0.9858 (0.950)	0.9852 (0.672)
MSC	0.9866 (2.462)	0.9845 (1.905)	0.9877 (1.345)	0.9858 (0.950)	0.9852 (0.672)
AWC	0.9866 (2.449)	0.9845 (1.898)	0.9859 (1.342)	0.9858 (0.949)	0.9852 (0.671)
Uniform	0.9866 (2.460)	0.9866 (1.904)	0.9859 (1.344)	0.9858 (0.950)	0.9852 (0.672)
Jeffreys	0.9839 (2.453)	0.9845 (1.900)	0.9864 (1.343)	0.9858 (0.950)	0.9860 (0.671)

ตารางที่ 3 ความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี เมื่อช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงไวบูลที่มี $ID = 1.69$

ความน่าจะเป็นค้ำรวม (ความยาวเฉลี่ย)					
กรณีประชากรมี $\mu = 2.51, \sigma^2 = 4.24$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.8594 (1.594)	0.8556 (1.238)	0.8633 (0.877)	0.8697 (0.621)	0.8690 (0.439)
WCC	0.8908 (1.749)	0.8950 (1.357)	0.8946 (0.961)	0.9028 (0.680)	0.9032 (0.481)
SC	0.8710 (1.615)	0.8670 (1.248)	0.8674 (0.880)	0.9658 (0.622)	0.8697 (0.440)
MSC	0.8710 (1.615)	0.8670 (1.248)	0.8674 (0.880)	0.8658 (0.622)	0.8697 (0.440)
AWC	0.8710 (1.594)	0.8670 (1.238)	0.8674 (0.877)	0.6858 (0.621)	0.8697 (0.439)
Uniform	0.8710 (1.612)	0.8670 (1.246)	0.8674 (0.880)	0.8721 (0.622)	0.8697 (0.439)
Jeffreys	0.8688 (1.601)	0.8670 (1.241)	0.8585 (0.878)	0.8658 (0.621)	0.8697 (0.439)
กรณีประชากรมี $\mu = 5.11, \sigma^2 = 8.64$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.8583 (2.282)	0.8604 (1.769)	0.8623 (1.252)	0.8692 (0.886)	0.8680 (0.627)
WCC	0.8807 (2.392)	0.8786 (1.854)	0.8872 (1.312)	0.8862 (0.928)	0.8853 (0.657)
SC	0.8652 (2.297)	0.8660 (1.775)	0.8642 (1.255)	0.8703 (0.887)	0.8682 (0.627)
MSC	0.8652 (2.297)	0.8735 (1.775)	0.8710 (1.255)	0.8703 (0.887)	0.8682 (0.627)
AWC	0.8652 (2.282)	0.8660 (1.769)	0.8642 (1.252)	0.8703 (0.886)	0.8682 (0.627)
Uniform	0.8652 (2.295)	0.8660 (1.774)	0.8642 (1.254)	0.8703 (0.887)	0.8682 (0.627)
Jeffreys	0.8761 (2.287)	0.8640 (1.771)	0.8710 (1.253)	0.8662 (0.886)	0.8714 (0.627)

ตารางที่ 4 ความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี เมื่อช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงแกมมาที่มี $ID = 0.64$

ความน่าจะเป็นค้ำรวม (ความยาวเฉลี่ย)					
กรณีประชากรมี $\mu = 1.29, \sigma^2 = 0.82$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9770 (1.143)	0.9832 (0.887)	0.9832 (0.628)	0.9842 (0.445)	0.9857 (0.314)
WCC	0.9956 (1.350)	0.9950 (1.047)	0.9958 (0.741)	0.9954 (0.524)	0.9961 (0.371)
SC	0.9837 (1.172)	0.9841 (0.901)	0.9875 (0.633)	0.9866 (0.446)	0.9861 (0.315)
MSC	0.9897 (1.172)	0.9841 (0.901)	0.9875 (0.633)	0.9866 (0.446)	0.9861 (0.315)
AWC	0.9837 (1.143)	0.9841 (0.887)	0.9842 (0.628)	0.9841 (0.445)	0.9844 (0.314)
Uniform	0.9837 (1.168)	0.9841 (0.899)	0.9875 (0.632)	0.9841 (0.446)	0.9844 (0.315)
Jeffreys	0.9838 (1.153)	0.9841 (0.892)	0.9845 (0.630)	0.9841 (0.445)	0.9861 (0.315)
กรณีประชากรมี $\mu = 15.43, \sigma^2 = 9.88$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.9857 (3.975)	0.9847 (3.079)	0.9857 (2.177)	0.9861 (1.540)	0.9864 (1.089)
WCC	0.9857 (4.039)	0.9861 (3.129)	0.9867 (2.212)	0.9878 (1.565)	0.9879 (1.106)
SC	0.9864 (3.983)	0.9850 (3.083)	0.9862 (2.179)	0.9862 (1.540)	0.9865 (1.089)
MSC	0.9864 (3.983)	0.9850 (3.083)	0.9862 (2.179)	0.9862 (1.540)	0.9865 (1.089)
AWC	0.9864 (3.975)	0.9850 (3.079)	0.9862 (2.177)	0.9862 (1.540)	0.9865 (1.089)
Uniform	0.9874 (3.982)	0.9850 (3.083)	0.9862 (2.179)	0.9862 (1.540)	0.9865 (1.089)
Jeffreys	0.9848 (3.978)	0.9850 (3.081)	0.9862 (2.178)	0.9862 (1.540)	0.9862 (1.089)

ตารางที่ 5 ความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี เมื่อช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงแกมมาที่มี $ID = 1.69$

ความน่าจะเป็นค้ำรวม (ความยาวเฉลี่ย)					
กรณีประชากรมี $\mu = 0.88, \sigma^2 = 1.48$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.8610 (0.933)	0.8551 (0.727)	0.8599 (0.517)	0.8623 (0.366)	0.8654 (0.259)
WCC	0.9500 (1.181)	0.9300 (0.916)	0.9403 (0.649)	0.9379 (0.460)	0.9414 (0.325)
SC	0.8676 (0.969)	0.8844 (0.743)	0.8695 (0.522)	0.8707 (0.368)	0.8692 (0.260)
MSC	0.8676 (0.969)	0.8844 (0.743)	0.8671 (0.522)	0.8707 (0.368)	0.8692 (0.260)
AWC	0.8676 (0.933)	0.8641 (0.727)	0.8534 (0.517)	0.8609 (0.366)	0.8692 (0.259)
Uniform	0.8676 (0.964)	0.8844 (0.741)	0.8695 (0.522)	0.8707 (0.368)	0.8692 (0.260)
Jeffreys	0.8676 (0.945)	0.8589 (0.733)	0.8671 (0.519)	0.8707 (0.367)	0.8607 (0.260)
กรณีประชากรมี $\mu = 3.61, \sigma^2 = 6.10$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.8622 (1.916)	0.8580 (1.485)	0.8687 (1.052)	0.8670 (0.744)	0.8704 (0.526)
WCC	0.8891 (2.046)	0.8868 (1.586)	0.8877 (1.122)	0.8955 (0.794)	0.8914 (0.562)
SC	0.8724 (1.933)	0.8645 (1.493)	0.8627 (1.054)	0.8676 (0.745)	0.8714 (0.527)
MSC	0.8724 (1.933)	0.8645 (1.493)	0.8627 (1.054)	0.8725 (0.745)	0.8714 (0.527)
AWC	0.8724 (1.916)	0.8645 (1.485)	0.8627 (1.052)	0.8676 (0.744)	0.8714 (0.526)
Uniform	0.8724 (1.930)	0.8645 (1.492)	0.8627 (1.054)	0.8676 (0.745)	0.8714 (0.527)
Jeffreys	0.8576 (1.921)	0.8624 (1.488)	0.8696 (1.053)	0.8725 (0.745)	0.8678 (0.526)

ตารางที่ 6 ความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี เมื่อจำนวนนับมาจากตัวแบบทวินามเชิงลบที่มี $ID = 1.69$

ความน่าจะเป็นค้ำรวม (ความยาวเฉลี่ย)					
กรณีประชากรมี $\mu = 2, \sigma^2 = 3.38$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.8456 (1.423)	0.8663 (1.105)	0.8594 (0.483)	0.8645 (0.554)	0.8659 (0.392)
WCC	0.9149 (1.594)	0.9015 (1.237)	0.9031 (0.876)	0.9066 (0.620)	0.9091 (0.438)
SC	0.8649 (1.446)	0.8601 (1.116)	0.8649 (0.787)	0.8661 (0.556)	0.8675 (0.393)
MSC	0.8649 (1.446)	0.8728 (1.116)	0.8649 (0.787)	0.8725 (0.556)	0.8675 (0.393)
AWC	0.8649 (1.423)	0.8601 (1.105)	0.8649 (0.783)	0.8661 (0.554)	0.8675 (0.392)
Uniform	0.8649 (1.443)	0.8601 (1.114)	0.8649 (0.786)	0.8661 (0.555)	0.8675 (0.392)
Jeffreys	0.8817 (1.430)	0.8728 (1.109)	0.8738 (0.784)	0.8725 (0.555)	0.8719 (0.392)
กรณีประชากรมี $\mu = 1.04, \sigma^2 = 1.76$					
วิธี	n				
	15	25	50	100	200
Wald	0.8529 (1.018)	0.8684 (0.793)	0.8680 (0.563)	0.8648 (0.399)	0.8703 (0.282)
WCC	0.9395 (1.248)	0.9336 (0.969)	0.9335 (0.687)	0.9318 (0.486)	0.9331 (0.344)
SC	0.8861 (1.050)	0.8722 (0.808)	0.8782 (0.568)	0.8672 (0.401)	0.8722 (0.283)
MSC	0.8861 (1.050)	0.8689 (0.808)	0.8782 (0.568)	0.8665 (0.401)	0.8722 (0.283)
AWC	0.8573 (1.018)	0.8508 (0.793)	0.8653 (0.563)	0.8573 (0.399)	0.8722 (0.283)
Uniform	0.8861 (1.046)	0.8722 (0.806)	0.8782 (0.568)	0.8672 (0.400)	0.8722 (0.283)
Jeffreys	0.8573 (1.029)	0.8689 (0.798)	0.8638 (0.565)	0.8665 (0.399)	0.8655 (0.283)



5. อภิปรายผลและสรุป

เมื่อข้อมูลเชิงนับเป็นไปตามคุณสมบัติของการแจกแจงแบบปัวซอง กล่าวคือ ค่าเฉลี่ยเท่ากับความแปรปรวน (ดัชนีวัดการกระจายมีค่าเท่ากับ 1) ช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธี ให้ค่าความน่าจะเป็นค้ำรวมไม่แตกต่างกันและโดยภาพรวม CP ยังคงใกล้เคียง 0.95 และเมื่อระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงแกมมาหรือไวบูล ดัชนีวัดการกระจาย (ID) ของประชากรจะเป็นตัวที่บ่งชี้ประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นของเฉลี่ยได้ดี กล่าวคือ ประชากรอาจมีค่าเฉลี่ยหรือความแปรปรวนต่างกันได้แต่ถ้าหาก ID น้อยกว่า 1 (Underdispersion) เช่น ในตารางที่ 2 และ 4 ช่วงทั้ง 7 วิธี ให้ CP ไม่ต่ำกว่า 0.95 และถ้าหาก ID มากกว่า 1 (Overdispersion) เช่น ในตารางที่ 3, 5 และ 6 ช่วงทั้ง 7 วิธีให้ CP น้อยกว่า 0.95

การเพิ่มขนาดตัวอย่างก็มิได้ทำให้ CP เปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัด เช่น เมื่อ n เท่ากับ 15 และ 200 ยังคงให้ CP ที่ใกล้เคียงกัน ผลลัพธ์ที่ว่า เมื่อเพิ่มขนาดตัวอย่างแล้วแต่ส่งผล CP น้อยนั้นสอดคล้องกับผลการศึกษาในการทบทวนวรรณกรรมของช่วงความเชื่อมั่นภายใต้ข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซอง เช่น ค่า CP ในตารางที่ 1 ในงานวิจัยของ Khamkong [10] ดังนั้น นักวิเคราะห์ข้อมูลควรระวังในการใช้ช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นภายใต้ข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซองซึ่งมีค่า ID เท่ากับ 1 โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีการแจกแจงไวบูลหรือแกมมาเพราะการเพิ่มขนาดตัวอย่างไม่ได้ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น

โดยสรุป ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยสำหรับข้อมูลที่มาจากการแจกแจงปัวซองยังคงใช้ได้ในการณ์ที่ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์มีการแจกแจงแกมมาหรือไวบูล แต่ดัชนี ID จะต้องมีค่าไม่เกิน 1 โดยในทางปฏิบัติเราจะไม่ทราบถึงการแจกแจงช่วงเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์ ดังนั้น จะต้องพิจารณาค่าประมาณของ ID ซึ่งอาจประมาณได้จาก S^2/\bar{X} ในตัวอย่าง โดยที่

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$$

เอกสารอ้างอิง

- [1] G. Boshnakov, T. Kharrat, and I. G. McHale, "A bivariate Weibull count model for forecasting association football scores," *International Journal of Forecasting*, vol. 33, pp. 458–466, 2017.
- [2] R. P. Dobrow, *Introduction to Stochastic Processes with R*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2016.
- [3] R. Baker and T. Kharrat, "Event count distributions from renewal processes: Fast computation of probabilities," *IMA Journal of Management Mathematics*, vol. 29, no. 4, pp. 415–433, 2018.
- [4] T. Kharrat, G. Boshnakov, I. G. McHale, and R. Baker, "Flexible regression models for count data based on renewal processes: The countr package," *Journal of Statistical Software*, 2018.
- [5] B. McShane, M. Adrian, E. T. Bradlow, and P. S. Fader, "Count models based on weibull interarrivals times," *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 26, no. 3, pp. 369–378, 2008.
- [6] R. Winkelmann, "Duration dependence and dispersion in count-data models," *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 13, no. 4, pp. 467–474, 1995.
- [7] E. L. Lehmann and P. Romano, *Testing Statistical Hypotheses*. New York: John Wiley & Sons, 2005.
- [8] L. A. Barker, "A comparison of nine confidence intervals for a Poisson parameter when the expected number of events is ≤ 5 ," *The American Statistician*, vol. 56, no. 2, pp. 85–89, 2002.
- [9] M. Tanusit, "Two-Side confidence intervals for the Poisson means," *International Journal of Modeling and Optimization*, vol. 2, no. 2, pp. 589–591, 2012.
- [10] M. Khamkong, "Approximate confidence interval for the mean of Poisson distribution,"



- Open Journal of Statistics*, vol. 2 no. 2, pp. 204–207, 2012 (in Thai).
- [11] Y. Guan, “Moved score confidence intervals for means of discrete distributions,” *American Open Journal Statistics*, vol. 1, pp. 81–86, 2001.
- [12] G. Upton and I. Cook, *Oxford Dictionary of Statistics*, 2nd ed. Oxford University Press, 2006.
- [13] R. Sultan and S. P. Ahmad, “Posterior estimates of Poisson distribution using R software,” *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, vol. 11, no. 2, pp. 530–535, 2012.
- [14] C. A. Rohde, *Introductory Statistical Inference with the Likelihood Function*, 1st ed. London: Springer, 2014.