



แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การรุกตัวของน้ำเค็มของแม่น้ำจันทบุรี

กมลภัสสร มั่นศิลป์¹ นพรัตน์ โพธิ์ชัย² สมภูมิ มีชานา³ และ วิศรุต คล้ายแจ้ง^{3*}

¹ สาขาวิชาวิศวกรรมบูรณาการ, โครงการจัดตั้งคณะวิศวกรรมศาสตร์บูรณาการและเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตะวันออก

² ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

³ กองการศึกษา, โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราช

* ผู้ประสานงานเผยแพร่ (Corresponding Author), E-mail: witsarut_popmath@hotmail.com

วันที่รับบทความ: 5 เมษายน 2566; วันที่ทบทวนบทความ: 20 มิถุนายน 2566; วันที่ตอบรับบทความ: 29 มิถุนายน 2566

วันที่เผยแพร่ออนไลน์: 28 สิงหาคม 2566

บทคัดย่อ: งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การรุกตัวของน้ำเค็มของแม่น้ำจันทบุรี โดยใช้สมการการแพร่และการพา 1 มิติเป็นสมการควบคุมของปัญหา และใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข MacCormack ในการแก้ปัญหасмการควบคุมแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อทำนายค่าความเค็มของน้ำบริเวณปากแม่น้ำและตลอดเส้นทางของแม่น้ำจันทบุรี โดยทำการเก็บข้อมูลตัวอย่างที่สถานีสังเกตการณ์และเก็บข้อมูลค่าความเค็มบริเวณปากแม่น้ำจันทบุรีและนำข้อมูลที่ได้ทำการประมาณค่าด้วยวิธีของ Cubic spline interpolation เพื่อให้เป็นข้อมูลที่เหมาะสมสำหรับใช้เป็นค่าขอบและค่าเริ่มต้นสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยจะแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบของกราฟแสดงการเปรียบเทียบและตารางของค่าความเค็มของน้ำแต่ละสถานีสังเกตการณ์ รวมถึงมีการวิเคราะห์กรณีของการเก็บข้อมูลที่มีความถี่ของการเก็บข้อมูลที่ต่างกัน พบว่าสามารถลดต้นทุนการเก็บข้อมูลเพื่อใช้ในการทำนายค่าความเค็มของน้ำโดยค่าที่คำนวณได้มีเปอร์เซ็นต์การคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้เมื่อเทียบกับข้อมูลจริงที่เก็บได้

คำสำคัญ: แบบจำลองทางคณิตศาสตร์; การรุกของน้ำเค็ม; สมการการแพร่-การพา

Mathematical Model for Salinity Intrusion Measurement of Chanthaburi River

Kamonpad Mansilp¹, Nopparat Pochai², Sompoom Meechowna³ and Witsarut Klaychang^{4*}

¹ Department of Integrated Engineering, Establishment Project Faculty of Integrated Engineering and Technology Chanthaburi campus, Rajamangala University of Technology Tawan-Ok, Chanthaburi

² Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

³ Faculty of Academy, Navaminda Kasatriyadhiraj Royal Air Force Academy

* Corresponding author, E-mail: witsarut_popmath@hotmail.com

Received: 5 April 2023; Revised: 20 June 2023; Accepted: 29 June 2023

Online Published: 28 August 2023

Abstract: The purpose of this research was to study a mathematical model of saltwater intrusion into the Chanthaburi River using one-dimensional diffusion and convection equations as governing equations for the problem. The MacCormack numerical method was used to solve mathematical model governing equations to predict water salinity in the estuary and along the Chanthaburi River's course. By collecting sample data at the observation stations and salinity data at the mouth of the Chanthaburi River, the approximated values were calculated using the method of cubic spline interpolation to provide boundary and initial values for the mathematical model. The comparison graphs and data tables of the salinity obtained from each observation station were presented. In addition, data collection with different data frequencies was analyzed. It was found that the cost of data collection for predicting water salinity can be reduced by an acceptable percentage compared to the actual data collected.

Keywords: Mathematical Model; Salinity Intrusion; Advection Diffusion Equation

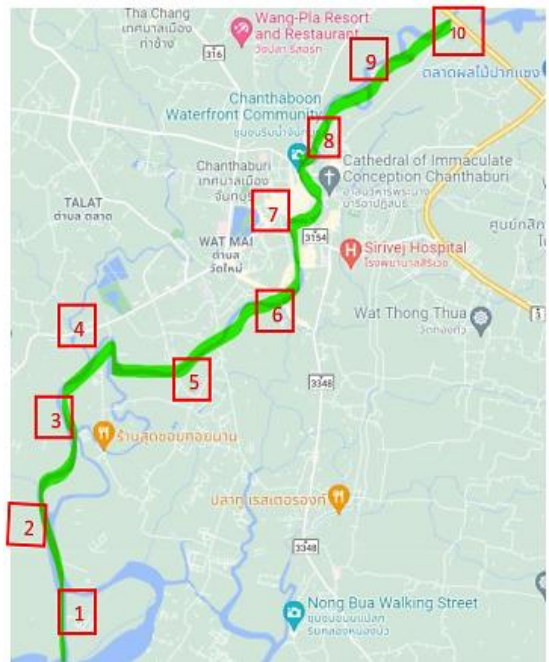


1. บทนำ

ปัจจุบันแนวโน้มการขาดแคลนน้ำจืดสำหรับใช้ในกิจกรรมต่างๆ ของประชากรมีเพิ่มมากขึ้นและมีความต้องการใช้น้ำที่เพิ่มมากขึ้น หรือเกิดจากปัญหาภูมิอากาศของโลกเกิดการเปลี่ยนแปลงทำให้เกิดปรากฏการณ์ภาวะโลกร้อนเกิดส่งผลกระทบต่อการละลายของภูเขาน้ำแข็งและทำให้ระดับน้ำทะเลเพิ่มสูงขึ้น อาจส่งผลกระทบต่อคุณภาพของแหล่งน้ำจืดทั้งบนผิวดินและใต้ดิน การเพิ่มขึ้นของระดับน้ำทะเลที่นับวันยังมีความรุนแรงมากขึ้น โดยผลกระทบดังกล่าวจะมีความรุนแรงแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่ตั้งถิ่นฐานของประชากรในแต่ละประเทศที่มีแนวโน้มการเพิ่มขึ้นของประชากรที่มีการย้ายถิ่นฐานมายังชายฝั่งสำหรับในประเทศไทยมีปัญหาการรุกตัวของน้ำทะเลในช่วงฤดูแล้ง ซึ่งส่งผลให้บางพื้นที่ไม่เหมาะที่จะนำน้ำมาใช้ประโยชน์สำหรับการเพาะปลูกพืชได้

ในด้านของทรัพยากรน้ำในจังหวัดจันทบุรีแม้ว่าจะอยู่ในพื้นที่ที่มีฝนตกชุก แต่จังหวัดจันทบุรียังคงประสบกับปัญหาภาวะความแห้งแล้งในพื้นที่ของจังหวัดเนื่องจากแม่น้ำทั้งหมดในจังหวัดเป็นแม่น้ำสายที่มีความยาวสั้นและขนาดไม่กว้าง แต่ถือว่าเป็นแม่น้ำที่มีความสำคัญของจังหวัดจันทบุรี โดยแม่น้ำจันทบุรีประกอบด้วยลำน้ำหลายสาขาไหลรวมกับแม่น้ำจันทบุรีไหลออกทางปากแม่น้ำซึ่งมีความยาวประมาณ 123 กิโลเมตร ดังรูปที่ 1 (และสถานีสังเกตการณ์ 1-10) ส่งผลให้น้ำในแม่น้ำไหลลงสู่อ่าวไทยอย่างรวดเร็ว ปัญหาการรุกตัวของน้ำเค็มบริเวณปากแม่น้ำสายหลายสายจะมีความรุนแรงมากกว่าปกติในช่วงฤดูแล้งเนื่องจากอัตราการไหลของน้ำในแม่น้ำมีค่าน้อยและทาง

ต้นน้ำมีการใช้น้ำเพื่อทำการเกษตร การอุปโภคและบริโภคในฤดูแล้งมากขึ้น โดยการวัดคุณภาพของน้ำเพื่อบอกคุณภาพน้ำที่เกี่ยวข้องกับความเค็ม สามารถตรวจวัดได้จากปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ในน้ำ ซึ่งน้ำจืดเพื่อการอุปโภคบริโภคค่าความเค็มจะต้องน้อยกว่า 0.25 g/l จากการเก็บข้อมูลภาคสนามจะเห็นได้ว่าปัญหาการรุกตัวของน้ำเค็มจึงมีผลเป็นอย่างมากในแม่น้ำจันทบุรี ซึ่งปัญหาเหล่านี้ส่งผลกระทบต่อเศรษฐกิจพื้นที่ทำการเกษตร การอุปโภคบริโภคของประชาชนบริเวณโดยรอบ การรุกตัวของน้ำเค็มในช่วงฤดูแล้งมักส่งผลให้ในบางพื้นที่ไม่เหมาะที่จะนำน้ำมาใช้ประโยชน์สำหรับการทำการเกษตร



รูปที่ 1 แผนที่แม่น้ำจันทบุรีจากปากอ่าวหาดแหลมสิงห์และจุดสังเกตการณ์ในการเก็บข้อมูลน้ำเค็ม



จากปัญหาดังกล่าวผู้วิจัยได้เห็นถึงปัญหาที่จะมีผลต่อชาวเกษตรกร รวมถึงประชาชนบริเวณใกล้เคียงที่ต้องใช้ประโยชน์จากน้ำในแม่น้ำจันทบุรีในการทำการเกษตร การอุปโภคและบริโภค จึงได้ทำการศึกษา ค้นคว้าองค์ความรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์จากงานวิจัยที่เป็นที่ยอมรับในระดับชาติและนานาชาติเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา มีงานวิจัย [1] ได้เสนอการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือช่วยในการแก้ปัญหา เฝ้าระวัง สังเกตการณ์ของการลुक้าน้ำเค็มของน้ำทะเลที่ลुक้าเข้ามายังแม่น้ำเจ้าพระยา โดยเริ่มแรกมีการศึกษาตัวสมการที่ใช้ในการหาค่าความเข้มข้นของน้ำเค็ม โดยสมการการแพร่-การพา(Advection Diffusion Equation) ศึกษาค่าพารามิเตอร์สำคัญที่เหมาะสมต่อของสมการของปัญหา เพื่อใช้ในการตรวจสอบประสิทธิภาพของแบบจำลองโดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากการแก้สมการด้วยวิธีการแม่นยำ (Exact Solution) และได้ทำการนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ไปใช้ในการทำนายค่าความเค็มของน้ำในแม่น้ำเจ้าพระยา โดยประกอบด้วยข้อมูลเบื้องต้นจากหน่วยงานรัฐ ซึ่งข้อมูลเหล่านี้เป็นข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่อง (เป็นข้อมูลที่เก็บได้บางช่วงเวลา) หรือมีข้อมูลบางส่วนที่ขาดหาย โดยในงานวิจัยนี้ได้เสนอทำนายค่าความเค็มที่ไม่ต่อเนื่องนี้ไปทำการประมาณค่าในช่วงด้วยวิธีของลากรองจ์ (Lagrange Interpolation) และการประมาณค่าด้วยสไปไลน์กำลังสาม (Cubic Spline Interpolation) เพื่อให้ข้อมูลที่ได้อยู่ในรูปที่ต่อเนื่อง และนำข้อมูลนี้เป็น ข้อมูลของค่าเงื่อนไขค่าขอบและข้อมูลค่าเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (Boundary Condition and Initial Condition) ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไป

ในการแก้ปัญหาสมการควบคุมที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งต้องอาศัยการใช้กระบวนการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้สมการของปัญหาดังกล่าวงานวิจัย [2-5] ได้ใช้ระเบียบวิธีของ MacCormack ในการประมาณข้อมูลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อคำนวณกระบวนการปรากฏการณ์ทางธรรมชาติควบคู่กับการพัฒนาความก้าวหน้าของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ โดยประมาณการไหลของกลศาสตร์ของไหลซึ่งช่วยทำให้ประหยัดในการคำนวณและมีความแม่นยำมากขึ้น งานวิจัย [6, 7] ได้ใช้วิธีการของ MacCormack ใช้ในการแก้ปัญหาสมการในรูปแบบของไฮเปอร์โบลิก ในงานวิจัย [8] ใช้ MacCormack ตรวจสอบพฤติกรรมของการไหลแบบไดนามิกผ่านหัวฉีดต่างๆ ต่อมาในงานวิจัย [9-11] ได้ปรับปรุงวิธีการ MacCormack ให้มีความแม่นยำที่มากขึ้นและมีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้นในการคำนวณ

จากปัญหาและการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการแก้ปัญหา ในงานวิจัยนี้จะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการทำนายค่าความเข้มข้นของน้ำเค็มที่ลुक้าเข้ามายังลุ่มแม่น้ำจันทบุรี โดยทำการเก็บข้อมูลตัวอย่างที่สถานีสังเกตการณ์ เมื่อเวลาเริ่มต้น และเก็บข้อมูลค่าความเค็มที่บริเวณปากแม่น้ำจันทบุรี เพื่อเป็นข้อมูลสำหรับข้อมูลที่ขอบ และในงานวิจัยนี้จะแบ่งหัวข้อออกเป็น น้ำเค็มบริเวณปากแม่น้ำจันทบุรีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ผลการทดลอง สรุปผล เอกสารอ้างอิง



2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในหัวนี้จะกล่าวถึงการอธิบายค่าความเข้มข้นของค่าความเค็มของน้ำในแม่น้ำจันทบุรี เมื่อน้ำเค็มจากปากแม่น้ำไหลเข้ามาในบริเวณแม่น้ำจันทบุรี โดยจะแบ่งหัวข้อย่อยคือ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของการแพร่ ความเค็มของแม่น้ำจันทบุรี โดยแบ่งเป็น สมการควบคุม ปัญหาค่าขอบและค่าเริ่มต้น

2.1 สมการควบคุม

จากรูปที่ 1 จะพิจารณาค่าความเค็มของน้ำในแม่น้ำจันทบุรีเป็นแนวยาว 1 มิติโดยไม่คิดความกว้างและความลึกของแม่น้ำ ในงานวิจัยนี้จะใช้สมการการแพร่และการพา 1 มิติ อธิบายค่าความเค็มของน้ำในแม่น้ำจันทบุรี ดังสมการที่ 1 โดยงานวิจัย [1]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (1)$$

สำหรับทุกค่า $x \in [0, L]$ และสำหรับทุกค่า $t \in [0, T]$ โดยที่ $S = S(x, t)$ คือค่าความเข้มข้นของความเค็มของน้ำ (g/l) ที่ตำแหน่ง x ที่เวลา t โดยที่

U คือ ความเร็วของน้ำในแนวแกน x (m/s)

D คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่ความเค็ม (m^2/s)

L คือ ความยาวของแม่น้ำจันทบุรี

T คือ เวลาของแบบจำลอง

2.2 เงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบ

น้ำเค็มในแม่น้ำจันทบุรีซึ่งได้รับอิทธิพลจากน้ำเค็มที่มาจากบริเวณปากแม่น้ำจันทบุรีด้วยปรากฏการณ์ของน้ำขึ้น-น้ำลง ผนวกกับน้ำเค็มเริ่มต้นที่มีอยู่ในแม่น้ำจันทบุรี แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ใน

งานวิจัยนี้จะใช้ข้อมูลน้ำเค็มจากปากแม่น้ำจันทบุรี โดยทำการนำเครื่องมือไปตรวจวัดเพื่อเก็บข้อมูลน้ำเค็มในช่วง 24 ชั่วโมงบริเวณปากแม่น้ำและนำข้อมูลที่ได้อไปทำการประมาณค่าในช่วง ซึ่งจะนำไปเป็นค่าเงื่อนไขค่าขอบและทำการเก็บข้อมูลน้ำเค็มเริ่มต้นของสถานีสังเกตการณ์ เมื่อเวลา 8.00 น. เพื่อนำข้อมูลที่ได้อไปประมาณค่าในช่วงโดยข้อมูลที่ได้อนี้จะไปเป็นค่าเงื่อนไขค่าเริ่มต้นต่อไป

2.2.1 เงื่อนไขค่าเริ่มต้น

ค่าน้ำเค็มที่ได้จากการเก็บข้อมูล เมื่อเวลา 8.00 น. ซึ่งมีข้อมูลอยู่ในรูปของฟังก์ชันเริ่มต้น $S(x, 0)$ โดยที่ $i = 1, 2, 3, \dots, N$ และ N เป็นจำนวนข้อมูลน้ำเค็มที่ใช้ในการเก็บข้อมูล เมื่อนำข้อมูลที่เก็บได้ทำการประมาณค่าในช่วง จะได้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นนั้นคือ $S(x, 0) = F(x)$ สำหรับทุกค่าของ $x \in [0, L]$ ซึ่ง $F(x)$ แทนฟังก์ชันค่าความเค็มของน้ำในแม่น้ำจันทบุรีตลอดทั้งเส้นที่ศึกษาในงานวิจัยนี้

2.2.2 เงื่อนไขค่าขอบ

ข้อมูลน้ำเค็มที่เก็บข้อมูลบริเวณปากแม่น้ำจันทบุรีซึ่งติดกับทะเลในช่วง 24 ชั่วโมง โดยข้อมูลที่เก็บได้คือ $S(0, t_j)$ โดยที่ $j = 1, 2, 3, \dots, M$ และ M เป็นจำนวนข้อมูลน้ำเค็มที่ถูกเก็บในช่วงเวลา เมื่อนำข้อมูลที่เก็บได้ทำการประมาณค่าในช่วง 24 ชั่วโมงจะได้ ค่าเงื่อนไขค่าขอบขวา $S(0, t) = G(t)$ สำหรับทุกค่าของ $t \in [0, T]$ ซึ่ง $G(t)$ แทนฟังก์ชันค่าความเค็มบริเวณปากแม่น้ำจันทบุรีที่ในช่วง 24 ชั่วโมงและที่เงื่อนไขค่าขอบซ้าย ซึ่งมีอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าความเค็มที่จุดตรวจสอบตำแหน่งสุดท้ายเท่ากับศูนย์ หรือ $\frac{\partial S}{\partial x}(L, t) = 0$ สำหรับทุกค่าของ $t \in [0, T]$



3. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ในหัวนี้จะนำเสนอการใช้ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาสมการควบคุมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อก่อนหน้านี้ โดยแบ่งออกเป็น ค่าเชิงตัวเลขสำหรับแก้สมการ สมการการแพร่-การพา ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการของ MacCormack รวมไปถึง การประมาณค่าด้วยสไปลน์กำลังสาม ในการประมาณค่าในช่วงของข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่องที่เกิดจากการเก็บภาคสนามมาใช้เพื่อให้ได้ข้อมูลขอบและข้อมูลเริ่มต้นของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันต่อเนื่อง

3.1 ระเบียบวิธีของ MacCormack

ในงานวิจัยนี้จะใช้ MacCormack Method ในการแก้สมการการแพร่-การพา ซึ่งได้มีการศึกษา [11] พบว่าวิธีการนี้เหมาะสมต่อการแก้สมการดังกล่าว

ในงานวิจัยนี้จะทำการกำหนดค่าของตัวแปร $S(x, t_n) = S_i^n$ โดยที่ $S(x, t)$ ถูกแทนด้วยค่าความเค็มของน้ำในแม่น้ำจันทบุรีที่ตำแหน่ง $x = i\Delta x$ ที่เวลา $t = n\Delta t$ ซึ่ง $0 \leq i \leq M$ และ $0 \leq n \leq N$ โดยที่ i, n, M, N เป็นจำนวนเต็มบวก โดยวิธีการของ MacCormack เป็นวิธีการที่ประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนแรก (ขั้นตอนการคาดคะเน)

ในขั้นตอนนี้จะประมาณค่าสมการควบคุมโดยใช้ Forward Time and Forward Space Scheme (FTFS) ดังนี้

กำหนดให้ $S \cong S^n$, และทำการประมาณค่าเทอมอนุพันธ์อันดับที่ 1 และอนุพันธ์อันดับ 2 ดังนี้

$$\frac{\partial S}{\partial t} \cong \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} \cong \frac{S_{i+1}^n - S_i^n}{\Delta x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cong \frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (4)$$

แทนสมการที่ (2) – (4) ลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} \right) + U \left(\frac{S_{i+1}^n - S_i^n}{\Delta x} \right) \\ & = D \left(\frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

สำหรับ $1 \leq i \leq M$ และ $0 \leq n \leq N-1$ จัดรูปสมการที่ (5) ใหม่จะได้

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} \right) \\ & = -U \left(\frac{S_{i+1}^n - S_i^n}{\Delta x} \right) + D \left(\frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & = -\frac{U}{\Delta x} S_{i+1}^n + \frac{U}{\Delta x} S_i^n + \frac{D}{\Delta x^2} S_{i+1}^n \\ & \quad - \frac{2D}{\Delta x^2} S_i^n + \frac{D}{\Delta x^2} S_{i-1}^n \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & = \left(-\frac{U}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2} \right) S_{i+1}^n + \left(\frac{U}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2} \right) S_i^n \\ & \quad + \frac{D}{\Delta x^2} S_{i-1}^n \end{aligned} \quad (8)$$

ให้ $\alpha_1 = -\frac{U}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2}$, $\alpha_2 = \frac{U}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2}$, $\alpha_3 = \frac{D}{\Delta x^2}$ และ

เทอมทางขวาของสมการ (8) คือ $(\delta_1)_i$ หรือ

$$(\delta_1)_i = \alpha_1 S_{i+1}^n + \alpha_2 S_i^n + \alpha_3 S_{i-1}^n \quad (9)$$

จากสมการที่ (8) จะได้ว่า

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} = (\delta_1)_i \quad (10)$$

$$\text{นั่นคือ } S_i^{n+1} = S_i^n + \Delta t (\delta_1)_i \quad (11)$$



พิจารณาที่ เงื่อนไขค่าขอบซ้าย เมื่อแทน $i=1$ ลงในสมการที่ (9) จะได้ว่า

$$(\delta_1)_1 = \alpha_1 S_2^n + \alpha_2 S_1^n + \alpha_3 S_0^n \quad (12)$$

พิจารณาที่ เงื่อนไขค่าขอบขวา เมื่อแทน $i=M$ ลงในสมการที่ (9) จะได้ว่า

$$(\delta_1)_M = \alpha_1 S_{M+1}^n + \alpha_2 S_M^n + \alpha_3 S_{M-1}^n \quad (13)$$

เนื่องจากที่ เงื่อนไขค่าขอบขวา กำหนดให้เป็นอนุพันธ์อันดับ 1 ของค่าความเค้มเมื่อเทียบกับพื้นที่ นั่นคือ $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ และทำการประมาณเทอมอนุพันธ์

อันดับ 1 ด้วย $\frac{S_{i+1}^n - S_i^n}{\Delta x} = 0$ ที่ $i=M$ จะได้ว่า

$$S_{M+1}^n = S_M^n \text{ และแทนลงใน (13) จะได้}$$

$$(\delta_1)_M = (\alpha_1 + \alpha_2) S_M^n + \alpha_3 S_{M-1}^n \quad (14)$$

เรียกสมการที่ (11) ว่าเป็น ขั้นตอนการคาดคะเนของ MacCormack Method ด้วย เงื่อนไขค่าขอบซ้ายและขวา (12) และ (14)

ขั้นตอนที่สอง (ขั้นตอนการแก้ไข)

ในขั้นตอนนี้จะประมาณค่าเทอมอนุพันธ์อันดับที่ 1 และอนุพันธ์อันดับ 2 ดังนี้

$$\frac{\partial S}{\partial t} \cong \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} \cong \frac{S_i^{n+1} - S_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cong \frac{S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}, \quad (17)$$

แทนสมการที่ (15) – (17) ลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\left(\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} \right)$$

$$= -U \left(\frac{S_i^{n+1} - S_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) + D \left(\frac{S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (18)$$

$$= \frac{D}{\Delta x^2} S_{i+1}^{n+1} + \left(-\frac{U}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2} \right) S_i^{n+1} + \left(\frac{U}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2} \right) S_{i-1}^{n+1} \quad (19)$$

ให้ $\beta_1 = \frac{D}{\Delta x^2}$, $\beta_2 = -\frac{U}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2}$, $\beta_3 = \frac{U}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2}$ และเทอมทางขวาของสมการ (19) คือ $(\delta_2)_i$ หรือ

$$(\delta_2)_i = \beta_1 S_{i+1}^{n+1} + \beta_2 S_i^{n+1} + \beta_3 S_{i-1}^{n+1} \quad (20)$$

พิจารณาที่ เงื่อนไขค่าขอบซ้าย เมื่อแทน $i=1$

ลงในสมการที่ (20) จะได้ว่า

$$(\delta_2)_1 = \beta_1 S_2^{n+1} + \beta_2 S_1^{n+1} + \beta_3 S_0^{n+1} \quad (21)$$

พิจารณาที่ เงื่อนไขค่าขอบขวา เมื่อแทน $i=M$

ลงในสมการที่ (20) จะได้ว่า

$$(\delta_2)_M = \beta_1 S_{M+1}^{n+1} + \beta_2 S_M^{n+1} + \beta_3 S_{M-1}^{n+1} \quad (22)$$

เนื่องจากที่ เงื่อนไขค่าขอบขวา กำหนดให้เป็น

อนุพันธ์อันดับ 1 ของค่าความเค้มเมื่อเทียบกับพื้นที่ หรือ $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ และประมาณเทอมอนุพันธ์อันดับ 1 ด้วย

$$\frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}}{\Delta x} = 0 \text{ ที่ } i=M \text{ จะได้ว่า } S_{M+1}^{n+1} = S_M^{n+1}$$

และแทนลงใน (22) จะได้

$$(\delta_2)_M = (\beta_1 + \beta_2) S_M^{n+1} + \beta_3 S_{M-1}^{n+1} \quad (23)$$

จะได้ Corrector Step ของ MacCormack คือ

$$S_i^{n+1} = S_i^n + \frac{\Delta t}{2} [(\delta_1)_i + (\delta_2)_i] \quad (24)$$

เมื่อ Conditionally Stable for MacCormack Scheme

$$\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} < 0.5 \text{ และ } \frac{U\Delta t}{\Delta x} < 0.9$$



3.2 การประมาณค่าด้วย Cubic Spline

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ จำเป็นต้องใช้ข้อมูลค่าน้ำเค็มที่ปากแม่น้ำจันทบุรี สำหรับใช้เป็นข้อมูลของเงื่อนไขค่าขอบ และข้อมูลน้ำเค็มของแต่ละสถานีสังเกตการณ์เมื่อเวลาเริ่มต้น 8.00 น. สำหรับใช้เป็นเงื่อนไขค่าเริ่มต้น โดยข้อมูลเหล่านี้เป็นข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่องและทำการนำข้อมูลเหล่านี้มาประมาณค่าให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่เป็นตัวแทนของจุดทั้งหมดที่เก็บข้อมูลได้ โดยใช้วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการ Cubic Spline Interpolation

จากกระบวนการทั้งหมดนี้รวมถึงเงื่อนไขที่พิจารณาจะได้เส้นโค้งกำลังสามที่เป็นตัวแทนของข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่องและนำไปใช้ประยุกต์กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับงานวิจัยนี้

4. ผลลัพธ์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในงานวิจัยนี้ได้เก็บข้อมูลน้ำเค็มในช่วงเดือนมีนาคมของทุกปี เนื่องจากเป็นช่วงที่มีการลुकน้ำเค็มอย่างมากจากปากแม่น้ำไปยังแม่น้ำจันทบุรีมากกว่า ซึ่งน้ำในแม่น้ำจันทบุรีนี้นำไปใช้ในการเพาะปลูกและการทำน้ำประปา โดยจะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการทำนายน้ำเค็มในแม่น้ำจันทบุรีตลอดช่วง 24 ชั่วโมง จะทำการกำหนดระดับน้ำขึ้น-ลงของแต่ละวันตลอดช่วง

เดือนมีนาคมให้มีค่าเท่ากันและทำการวัดค่าน้ำเค็มที่ปากแม่น้ำจันทบุรีตลอดจนค่าน้ำเค็มเริ่มต้นของแต่ละสถานีสังเกตการณ์เพื่อใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้

ในงานวิจัยนี้จะเก็บข้อมูลเพื่อนำมาใช้เป็นข้อมูลเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (Initial Condition) โดยจะเก็บข้อมูลค่าความเค็มของน้ำที่เวลา 8.00 น. ของแต่ละสถานีสังเกตการณ์โดยกำหนด 10 สถานีและเก็บข้อมูลบริเวณปากแม่น้ำทุก ๆ 3 ชั่วโมง เพื่อเป็นข้อมูลสำหรับข้อมูลเงื่อนไขค่าขอบ (Boundary Condition) โดยเริ่มจาก 8.00 น. จนถึง 8.00 น. ในวันถัดไป และ จะแสดงผลช่วงเวลา 24 ชั่วโมง ภายในแม่น้ำจันทบุรีในรูปแบบของกราฟและตารางค่าความเค็มของน้ำ โดยพิจารณาจากสถานีที่ 1 - 10 โดยแต่ละสถานีห่างกันประมาณ 3 กิโลเมตร รวมระยะทางทั้งหมด 27 กิโลเมตร เพื่อคาดคะเนน้ำเค็มในเวลาและจุดใด ๆ ในขอบเขตที่กำหนดโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลบางจุดที่เก็บได้

ในงานวิจัยนี้กำหนดให้สัมประสิทธิ์การแพร่ของน้ำเค็มเป็น 0.1 m²/s อ้างอิง [1] และเก็บข้อมูลความเร็วน้ำเท่ากับ 0.06 m/s และฟังก์ชันที่เงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ข้อมูลน้ำเค็มที่เก็บเมื่อเวลา 8.00 น. ของแต่ละสถานีสังเกตการณ์ซึ่งเป็นข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่องเพื่อใช้ในการ Interpolation สำหรับใช้เป็นข้อมูลเงื่อนไขค่าเริ่มต้นในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ค่าความเค็มของน้ำที่แต่ละสถานี เมื่อเวลา 8.00 น. (g/l)										
สถานีสังเกตการณ์	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	34.94	32.87	29.64	25.83	23.53	19.59	16.31	15.82	12.93	8.56



ตารางที่ 2 ข้อมูลน้ำเค็มที่เก็บบริเวณปากแม่น้ำจันทบุรี โดยเก็บในช่วง 24 ชั่วโมง เมื่อเวลา 8.00 น. ซึ่งเป็นข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่องเพื่อใช้ทำการ Interpolation สำหรับใช้เป็นข้อมูลเงื่อนไขค่าขอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

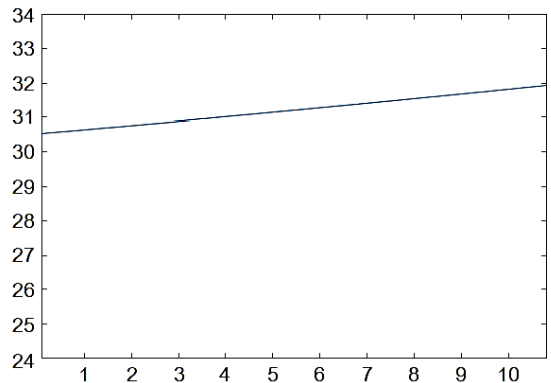
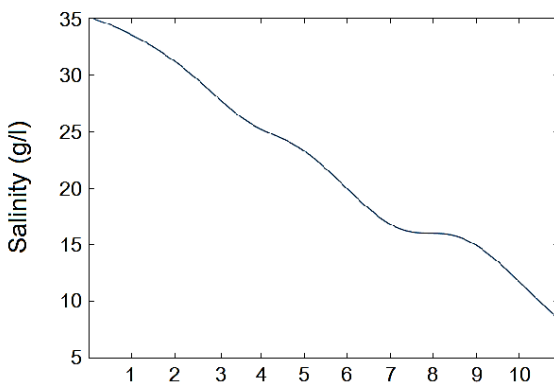
ค่าความเค็มของน้ำที่ปากแม่น้ำจันทบุรี ในช่วง 24 ชั่วโมง (g/l)

ช่วงเวลา	8.00	11.00	14.00	17.00	20.00	23.00	2.00	5.00	8.00
	34.94	30.53	27.93	25.15	20.65	27.16	29.21	30.93	33.64

กรณีที่ 1 แสดงค่าน้ำเค็มตลอดเส้นทางแม่น้ำจันทบุรีที่สถานีที่ 1-10 แต่ละช่วงเวลาทุก ๆ 3 ชั่วโมง ตั้งแต่ 8.00 ถึง 8.00 ของวันถัดไป รูปที่ 2-5 แสดงระดับค่าความเค็มของน้ำ แกนนอนแสดงถึงระยะความยาวของแม่น้ำจันทบุรีที่ประกอบด้วยสถานีสังเกตการณ์ และแกนตั้งแสดงค่าความเค็มของน้ำในหน่วยของ g/l

กรณีที่ 2 แสดงค่าความเค็มของน้ำของสถานีสังเกตการณ์ (จุดที่ 3,5,7,9) ในช่วง 24 ชั่วโมง ตั้งแต่ 8.00 ถึง 8.00 ของวันถัดไป กราฟรูปที่ 6-7 แสดงระดับค่าความเค็มของน้ำ แกนนอนแสดงเวลาช่วง 24 ชั่วโมง สถานีสังเกตการณ์ และแกนตั้งแสดงค่าความเค็มของน้ำในหน่วย g/l

ผลลัพธ์ที่ได้เสนอจะใช้ข้อมูลที่บริเวณปากแม่น้ำจันทบุรี หรือ สถานีที่ 1 ซึ่งเก็บข้อมูลค่าความเค็มของน้ำทุก 3 ชั่วโมง ทำให้เกิดค่าใช้จ่ายและมีความลำบากในการเก็บข้อมูลทุก 3 ชั่วโมง ผลลัพธ์ต่อมานำเสนอการเก็บข้อมูลสถานีที่ 1 โดยเก็บทุก 6 ชั่วโมงและทุก 12 ชั่วโมงและจะนำข้อมูลที่เก็บได้นำไปประมาณค่าให้เป็นฟังก์ชันที่ใช้เป็นข้อมูลที่ขอบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ โดยจะแสดงในรูปของกราฟเปรียบเทียบและตารางแสดงค่าเปรียบเทียบ ทั้ง 3 กรณีตั้งรูปที่ 8

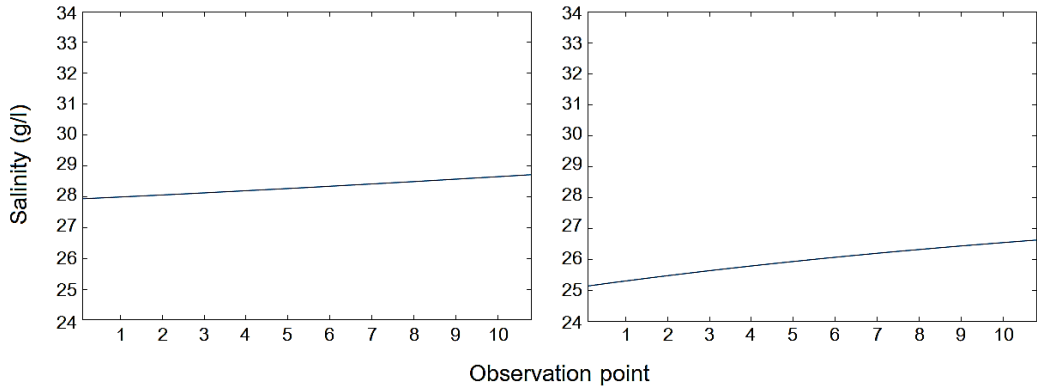


Observation point

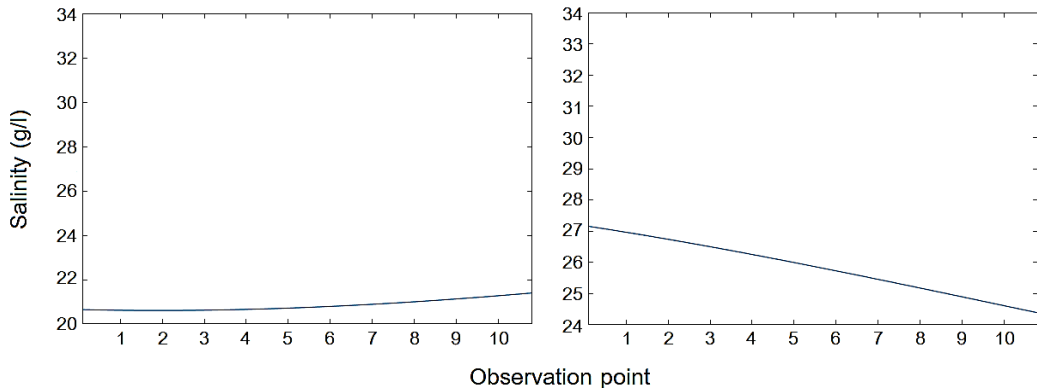
รูปที่ 2 กราฟแสดงค่าความเค็มของน้ำตลอดเส้นทางแม่น้ำจันทบุรีเมื่อเวลา 8.00 น. (ซ้าย) และ 11.00 น. (ขวา)



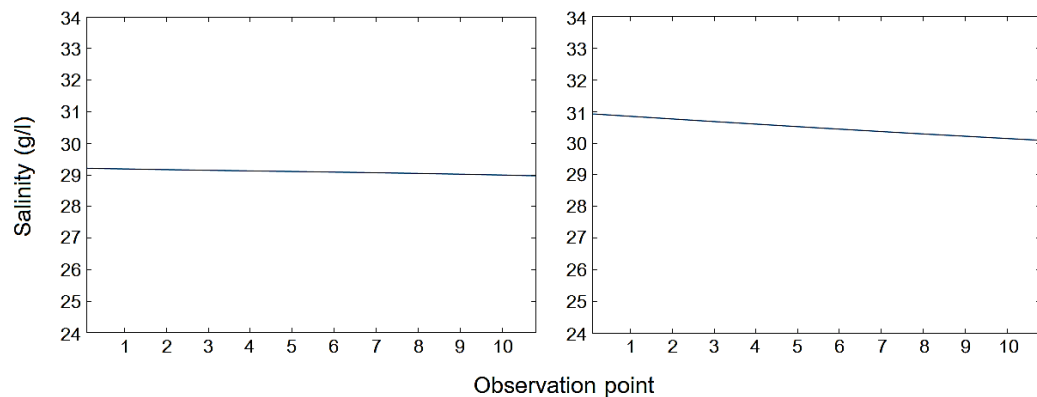
บทความวิจัย



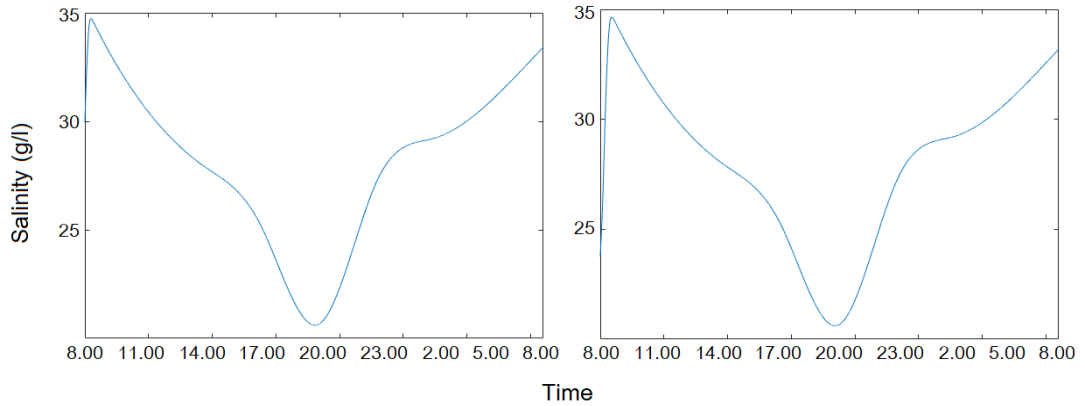
รูปที่ 3 กราฟแสดงค่าความเค็มของน้ำตลอดเส้นทางแม่น้ำจันทบุรีเมื่อเวลา 14.00 น. (ซ้าย) และ 17.00 น. (ขวา)



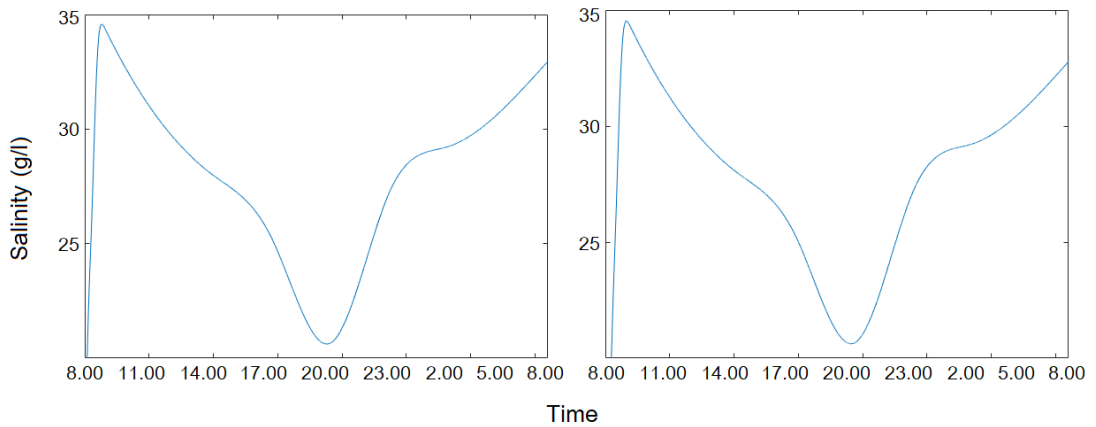
รูปที่ 4 กราฟแสดงค่าความเค็มของน้ำตลอดเส้นทางแม่น้ำจันทบุรีเมื่อเวลา 20.00 น. (ซ้าย) และ 23.00 น. (ขวา)



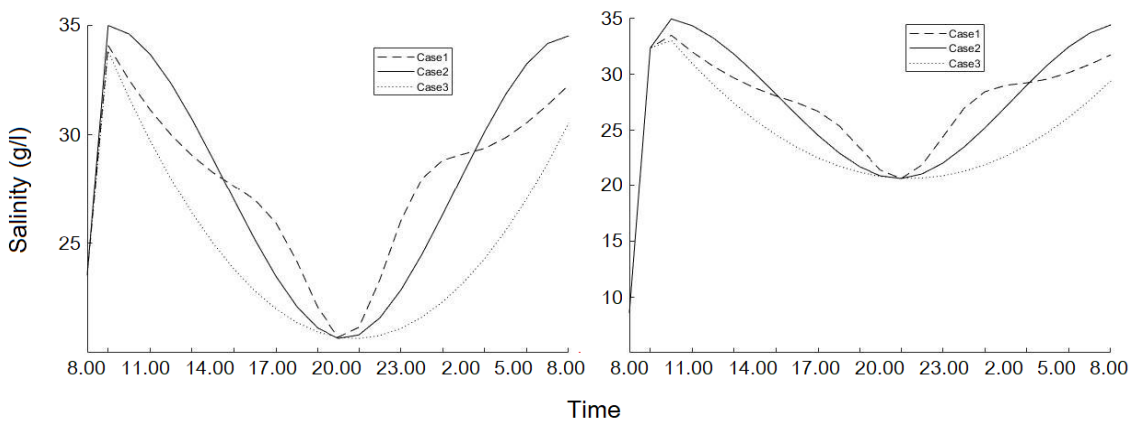
รูปที่ 5 กราฟแสดงค่าความเค็มของน้ำตลอดเส้นทางแม่น้ำจันทบุรีเมื่อเวลา 2.00 น. (ซ้าย) และ 5.00 น. (ขวา)



รูปที่ 6 กราฟแสดงค่าความเค็มของน้ำ ณ สถานีที่ 3 และ สถานีที่ 5



รูปที่ 7 กราฟแสดงค่าความเค็มของน้ำ ณ สถานีที่ 7 และ สถานีที่ 9



รูปที่ 8 กราฟเปรียบเทียบค่าน้ำเค็มที่สถานีที่ 5 (ซ้าย) และ 9 (ขวา) ตลอด 24 ชั่วโมง ใน 3 กรณี



ค่าตัวเลขในตารางที่ 3-4 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค็มของน้ำในแม่ น้ำจันทบุรี ในกรณีที่แตกต่างกันของช่วงเวลาการเก็บข้อมูลที่ปากแม่น้ำจันทบุรี และนำข้อมูลไปทำการประมาณค่าเพื่อได้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่เป็นเงื่อนไขสำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ข้อมูลที่ได้เสนอนี้เป็นการใช้เพื่อเป็นแนวทางช่วยตัดสินใจในการทำนายค่าความเค็มของน้ำสำหรับการเก็บข้อมูลที่ปากแม่น้ำทุก 3 ชั่วโมง (กรณี 1) เนื่องจากมีการเก็บข้อมูลถี่ทุก 3 ชั่วโมงทำให้การทำนายน้ำเค็มในแม่ น้ำจันทบุรี มีความแม่นยำมากขึ้นเนื่องจากมีข้อมูลหลายช่วงเวลา ซึ่งข้อเสียคือในการเก็บข้อมูลจริงสำหรับกรณีนี้มีค่าใช้จ่ายมากขึ้นต่อการเก็บข้อมูลที่มากขึ้น

ประกอบกับต้องใช้เวลาในการเก็บข้อมูลนานขึ้น และข้อดีสำหรับสำหรับการเก็บข้อมูลของน้ำเค็มที่บริเวณปากแม่น้ำทุก 6 ชั่วโมง และ 12 ชั่วโมง เป็นการประหยัดค่าใช้จ่ายและลดเวลาในการเก็บข้อมูล แต่อาจจะทำให้ทำนายค่าความเค็มของน้ำในแม่ น้ำจันทบุรี มีความคลาดเคลื่อนออกจากค่าจริงจากตารางที่ 4 ค่าความเค็มของน้ำที่เวลา 14.00 น. ค่าความเค็มของกรณี 2 (29.79 g/l) เมื่อเทียบกับกรณี 1 (28.62 g/l) จะมีค่าคลาดเคลื่อนของค่าความเค็มของน้ำเท่ากับ 4.08 % และค่าความคลาดเคลื่อนของกรณี 3 (25.67 g/l) เมื่อเทียบกับกรณีที่ 1 (28.62 g/l) มีค่าความคลาดเคลื่อนของค่าความเค็มของน้ำเท่ากับ 10.31 %

ตารางที่ 3 ตารางเปรียบเทียบค่าความเค็มของน้ำที่สถานีที่ 5 ทุก 2 ชั่วโมง

ค่าความเค็มของน้ำที่สถานีที่ 5 ในช่วง 24 ชั่วโมง (g/l)

เวลา	8.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00	20.00	22.00	24.00	2.00	4.00	6.00	8.00
กรณี 1	23.53	32.48	29.98	28.25	26.97	24.16	20.70	23.33	27.97	29.10	29.85	31.35	33.18
กรณี 2	23.53	34.58	32.32	29.56	25.15	22.10	20.65	21.59	24.47	28.25	31.83	34.15	34.13
กรณี 3	23.53	31.66	27.95	25.00	22.81	21.37	20.70	20.78	21.62	23.21	25.57	28.68	32.55

ตารางที่ 4 ตารางเปรียบเทียบค่าความเค็มของน้ำที่สถานีที่ 9 ทุก 2 ชั่วโมง

ค่าความเค็มของน้ำที่สถานีที่ 9 ในช่วง 24 ชั่วโมง (g/l)

เวลา	8.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00	20.00	22.00	24.00	2.00	4.00	6.00	8.00
กรณี 1	12.82	33.24	30.53	28.62	27.33	25.14	21.22	22.11	27.14	39.00	39.58	30.92	32.71
กรณี 2	12.82	34.85	33.03	29.79	26.06	22.75	20.82	21.13	23.63	27.28	31.01	33.74	34.41
กรณี 3	12.82	32.70	28.81	25.67	23.29	21.66	20.80	20.69	21.34	22.74	24.91	27.83	31.51



5. สรุปผล

ปัจจัยหลักของค่าความเค็มของน้ำในแม่น้ำจันทบุรีที่สูงขึ้นมาจากอิทธิพลการรุกคืบของน้ำทะเลบริเวณปากแม่น้ำตามกระแสน้ำขึ้นและน้ำลง การแผ่กระจายการรุกคืบของน้ำเค็มจึงเป็นสิ่งสำคัญที่จะต้องคอยสังเกตการณ์เพราะน้ำในแม่น้ำจันทบุรีเป็นน้ำใช้ทำน้ำประปา ทำการเกษตรของชุมชนบริเวณรอบเนื่องจากตลอดเส้นทางแม่น้ำจันทบุรีมีการตั้งสถานีวัดค่าน้ำเค็มของแม่น้ำมีน้อยประกอบกับการวัดค่าน้ำเค็มไม่ได้ครอบคลุมทุกช่วงเวลา ในงานวิจัยนี้จึงเสนอการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการคำนวณเพื่อพยากรณ์ค่าความเค็มของน้ำในช่วงเดือนที่มีการรุกคืบน้ำเค็มมากที่สุดและผลลัพธ์ที่ได้สามารถเป็นข้อมูลช่วยในการตัดสินใจได้ว่าเวลาที่เหมาะสมต่อการนำน้ำไปใช้ประโยชน์ของแต่ละช่วงของแม่น้ำจันทบุรี

จากข้อมูลน้ำเค็มที่เก็บข้อมูลจากปากแม่น้ำและนำไปประมาณค่า ที่มีค่าความเค็มมากน้อยสลับกันแต่ละช่วงเวลาเนื่องจากกระแสน้ำขึ้นน้ำลงในแต่ละวันและขนาดของแม่น้ำจันทบุรีที่มีระยะทางที่สั้นส่งผลต่อค่าความเค็มของน้ำบริเวณสถานีสังเกตการณ์ที่กำหนดไว้ โดยจากผลลัพธ์ที่ได้ แนวโน้มของค่าน้ำเค็มที่แสดงในรูปแบบของตารางและกราฟมีทิศทางไปในทิศทางเดียวกันกับค่าน้ำเค็มแต่ละสถานี

จากกรณีศึกษา ตัวอย่างจากกราฟผลลัพธ์หากมีการนำน้ำในแม่น้ำจันทบุรีไปทำน้ำประปาควรเลือกช่วงประมาณ 20.00 น. เนื่องจากค่าความเค็มของน้ำมีค่าต่ำ ทำให้ลดต้นทุนในการทำน้ำประปาที่สามารถใช้ได้

บริเวณแม่น้ำจันทบุรีมีการทำเกษตรกรรม การทำนา กุ้งและส่วนใหญ่จะนำน้ำในแม่น้ำจันทบุรีไปเก็บในบ่อที่ชาวบ้านสร้างเพื่อนำน้ำที่เก็บนี้ไปใช้ประโยชน์ซึ่งการ

นำน้ำเค็มไปเก็บในบ่อดินในระยะเวลาอันนานจะมีผลต่อการที่น้ำเค็มซึมลงดินทำให้ดินบริเวณนั้นมีความเค็มจนทำให้เกิดปัญหาในระยะยาวต่อการทำเพาะปลูกพืชเศรษฐกิจ ในส่วนปัญหานี้จะนำไปสู่งานวิจัยต่อไปในอนาคต

6. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สามารถดำเนินการวิจัยได้โดยเสร็จสมบูรณ์ ต้องขอขอบพระคุณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตะวันออก ที่ได้สนับสนุนทุนศึกษาวิจัย เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาต่อไป

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] K. Khemisara and P. Nopparat, Numerical simulation for salinity intrusion measurement models using the MacCormack finite difference method with lagrange interpolation, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 2020, 23(6), 1157-1185.
- [2] J. Stalaker, A variation on Mac Cormack's method for axisymmetric viscous compressible flows, AIAA Journal, 1983, 21, 1043-1044.
- [3] J. Lawrence, L Tannehill and C. Chaussee, Application of the implicit MacCormack scheme to the parabolized Navier-Stokes equations, Interim Report National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, CA, USA, 1984.



- [4] M.M. Marcelo, B. José Divo and B. Bressan, Finite volume analysis with the MacCormack method applied to metal flow in forward extrusion, *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 5(1), 1-8.
- [5] F. Gumilar and P.H. Gunawan, Parallel computation of MacCormack method for simulating nozzle gas flow, 7th International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT), *Proceeding*, 2019, 1-8.
- [6] K. Hongjoong, Two-step MacCormack method for statistical moments of a stochastic Burger's equation, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2007, 5(14), 28657-28684.
- [7] P. Nopparat, Numerical treatment of a modified MacCormack scheme in a nondimensional form of the water quality models in a nonuniform flow stream, *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 1-8.
- [8] M. S. Rasoul, G. Sarmad, M.F. Majid and A.A. Bidckhti, Numerical solution of the shallow water equations using fourth-order compact MacCormack scheme, *The Journal of the Earth and Space Physics*, 2017, 43(1), 209-228.
- [9] J. Reza and G. Sarmad, Application of the fourth-order compact MacCormack scheme with a four-stage Runge–Kutta time marching for numerical solution of unsteady and non-linear Rossby adjustment problem, *Iranian Journal of Geophysics*, 2017, 11(3), 57-74.
- [10] H. Shufang, Q. Wenlin and C. Hongbin, A predictor–corrector compact finite difference scheme for a nonlinear partial integro-differential equation, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2021, 23(3), 892-898.
- [11] N. Eric , R.T. Alqahtani and N.C. Jean, A MacCormack method for complete shallow water equations with source terms, *Numerical Analysis*, 2019, 1-27.